KFKI-73-24

Andréka H.
Gergely T.
Németi I.

VIZSGÁLATOK AZ ALGEBRAI LOGIKA TERÜLETÉN

Hungarian Academy of Sciences

CENTRAL RESEARCH INSTITUTE FOR PHYSICS

BUDAPEST

KFKI-73-24

VIZSGÁLATOK AZ ALGEBRAI LOGIKA TERÜLETÉN

Andréka H., Gergely T., Németi I.**

Központi Fizikai Kutató Intézet
Számitógép Főosztály

* NIM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet
Számolóközpontja

ABSTRACT

This paper is concerned about the concept of logic; and about the relations between logic and language, logic and calculus.

To this end the algebraic methods of logic are further elaborated, using the book "Cylindric Algebras" of Henkin, Monk and Tarski /Published in 1971/ as a starting point. By these methods the algebraic structure of first order logic /syntax and semantics as well/ is investigated, and at the end first order logic is reconstructed in a natural, purely algebraic manner. One of the main results is the purely algebraic construction of first-order semantics. It is shown by examples that the results are not necessarily restricted to first-order logic.

The main results of the paper can be used in artificial intelligence /and in computational logic, programming theory etc./ to synthetise adequate logical systems /and languages/ for the different problems.

РЕЗЮМЕ

Данная работа освещает понятие логики, связи между логикой и языком и между логикой и исчислением. Для этого предлагается чисто алгебраические методы, которые развивают методы, разработанные в книге Хенкин, Монк и Тарски "Цилиндрические алгебры". При помощи этих методов выясняется алгебраическая структура /синтаксиса и семантики/ предикатного исчисления первого порядка. Центральное место занимает математическое построение семантики.

Результаты работы дают эффективное средство для теории искусственного интеллекта. Они позволяют синтезировать адекватную решаемой проблеме логику. В первой главе и в списке определений приводятся необходимые для понимания изложенного материала понятия.

KIVONAT

Jelen dolgozat tisztázza a logika fogalmát és a logika-nyelv, logika-kalkulus kapcsolatokat. Ehhez a logika tisztán algebrai vizsgálati módszerei vannak kidolgozva, amelyek a Henkin, Monk, Tarski: "Cylindric algebras" c. könyvben kidolgozott módszerek továbbfejlesztései. Ezen módszerek segitségével a szerzők tisztázzák az elsőrendü predikátumkalkulus algebrai strukturáját /szintaktikáját és szemantikáját/. A dolgozat egyik lényeges eredménye a szemantika tisztán matematikai felépitése.

A tanulmány eredményei a mesterséges intelligenciaelmélet számára igen hatékony eszközöket nyujtanak, amelyek segitségével a megoldandó problémákhoz adekvát logikák szintézise elvégezhető.

A tanulmány megértéséhez szükséges alapismeretek az első fejezetben és a definiciójegyzékben vannak megadva.

T A R T A L O M J E G Y Z É K

ELŐSZÓ

Ez a tanulmány az elsőrendü predikátumkalkulus*/ algebrai tulajdonságait vizsgálja. Kisérletet tesz a predikátumkalkulus tisztán algebrai előállitására, azt a célt tartva szem előtt, hogy az algebrai konstrukció elég természetes maradjon ahhoz, hogy az algebra eszközeit hatékonyan lehessen rá alkalmazni, viszont ugyanakkor a logikai lényeg se torzuljon el.**/

A fenti cél megvalósitására kinálkozott két, ma már klasszikusnak nevezhető irányzat: a poliadikus algebrák elmélete [Halmos 62] és a cilindrikus algebrák elmélete [Henkin-Monk-Tarski 71] vagy ezek szintézisére irányuló törekvések valamelyike, pl. [Lucas 68] . Különböző megfontolások alapján a cilindrikus algebrák elméletét választottuk. E megfontolások között szerepelt az is, hogy a cilindrikus algebrák elméletéről 1971-ben megjelent egy 500 oldalas könyv, mely az elmélet univerzális algebrai vonatkozásait - tudunkkal - "páratlan" mélységgel dolgozza ki. A tanulmány teljesen erre a könyvre([Henkin-Monk-Tarski 71])épül, melyet a továbbiakban "a könyv" -ként idézünk.

---

*/
A tanulmány közelitésmódját nemcsak elsőrendü predikátumkalkulusra, hanem pl. n -edrendü predikátumkalkulusra [Andréka-Gergely-Németi 73a] és többfajtáju predikátumkalkulusra [Andréka-Gergely-Németi 73b] is alkalmaztuk, de a rövidség érdekében ezekre itt nem térünk ki.

**/
A fenti probléma megoldására semmiképpen nem alkalmas az olyan közelitésmód, mint pl. a Lindenbaum algebra vizsgálata, hiszen ez a zárt formulákra korlátozódik, és pl. a kvantorokról nem mond semmit. E közelitésmódot próbáltuk általánositani nyitott formulákra az [Andr. 72] -ben, ehhez rendezések helyett előrendezéseket használtunk.

A tanulmány elején bevezetjük a lokálisan függetlenül véges cilindrikus halmazalgebrák osztályát (a továbbiakban Lr), melyre a logikai tételek bizonyitásánál (és egy részüknek kimondásánál) van szükség. A könyv ezt az algebraosztályt nem definiálja. A logikai tételeknél szükség van a cilindrikus algebrák és Lr közti azon összefüggésre, hogy $\mathbf{SP}\,Lr = \mathbf{SP}\,Lf$, ahol Lf a lokálisan véges cilindrikus algebrák osztálya. E tétel bizonyitásához szükségünk volt a Gödel teljességi tétel egy általánositott változatára és egy reprezentációtételre a cilindrikus algebrák elméletéből. A tanulmányban mindkettőt kimondjuk és bizonyitjuk. Az utóbbi tételt a könyv egy megjegyzésben (1.11.2.) körvonalazza, preciz kimondását és bizonyitását a második részre igéri. Az eddig elmondottakat a tanulmány I. és II. fejezete tartalmazza. A tanulmány lényeges eredményei a III. fejezetben találhatók.

A predikátumkalkulus algebrai vizsgálatát megkönnyitette az a tény, hogy [Andréka-Gergely-Németi 73a] -ban precizen bizonyitottuk, hogy a függvényjeles logika visszavezethető a függvényjelmentes logikára, sőt, a visszavezetést konkrétan meg is adtuk. Ennek alapján pontosan lehet tudni, hogy a függvényjelmentes logikára érvényes tételek közül melyek és hogyan érvényesek a függvényjeles logikára. Ezért a jelen tanulmányban elég a függvényjelmentes logikát vizsgálni.

A III.2. fejezetben a t-tipusu elsőrendü formulák halmazán (F_{P_t}) értelmezett szemantikus ekvivalenciát ($\equiv$) előállitjuk mint a cilindrikus algebrák valamilyen definiáló relációk (R_t) alatt szabad kongruenciáját, formálisan:

$$\equiv \; = \; Cr_{P_t}^{(R_t)} CA$$

Tehát a tautológikus formulaalgebra az R_t alatt szabad cilindrikus algebra.

Ezen tulmenően a logika szerkezetének részletesebb vizsgálatára a kiértékelő függvényt (mely minden formulához megmondja, hogy mely interpretációkban mely kiértékelések mellett igaz) előállitjuk, mint az $\mathcal{L}r$ algebraosztály R_t alatt szabad szorzatát.

A predikátumkalkulus igy kapott algebrai előállitása csak részben felel meg a korábbiakban vázolt célnak, mivel az algebrai konstrukció nem elég természetes. Pontosabban, az R_t difiniáló relációk szerkezete légbőlkapott, aminek az az oka, hogy a vizsgált nyelv (ezen belül a P_t primformulák) szerkezete légbőlkapott, ill. kényelmi szempontokat tükröz. Ezért a III.3. fejezetben megfosztjuk az elsőrendü predikátumkalkulust a rárakódott fölösleges szerkezettől és bevezetünk egy változójelmentes logikát, mely teljesen ekvivalens az előbbivel. A változójelmentes logikában egyszerüsitő jelöléseket bevezetve (a logika megváltoztatása nélkül) visszanyerhetjük a szokásos elsőrendü logikákat, pl. változójeles, függvényjeles, többfajtáju stb. logikát.

Evvel a predikátumkalkulus algebrai vizsgálatában eljutottunk arra a szintre, melyen az itéletkalkulus algebrai vizsgálata áll: ahogyan az itéletkalkulus tautologikus formulaalgebrája a szabad Boole-algebra, ugy a t-tipusu változójelmentes predikátumkalkulus tautológikus formulaalgebrája a t-vel dimenziókorlátozott szabad cilindrikus algebra. Hasonlóan, a kiértékelő függvény az $\mathcal{Lr}$ algebraosztály t-vel dimenziókorlátozott szabad szorzata. Az igy kapott algebrai konstrukció mostmár elég természetes, mert a dimenziókorlátozás egy elég természetes algebrai fogalom, mely kiterjedt elmélettel rendelkezik. A III.4. fejezetben bizonyitjuk a felhasznált eszközök, pl. a definiáló-relációk elkerülhetetlenségét. A logikát módositva azonban az algebrai konstrukció egyszerüsitése tovább folytatható: A IV. fejezet kitér egy olyan logikára, melynek kifejezőereje megegyezik az elsőrendü predikátumkalkuluséval és melyre az elsőrendü predikátumkalkulus bizonyos értelemben visszavezethető (olyan értelemben, ahogy az egyenlőséges logika visszavezethető az egyenlőségmentesre). Ez a logika mostmár még egyszerübb algebrai eszközökkel épithető fel: nincs szükség sem definiáló-relációkra, sem dimenziókorlátozásra.

Nyitott kérdés marad a III.fejezet eredményeinek, pl. $\equiv \; = \; Gr_{P_t}^{(R_t)}\, CA$ -nak közvetlen bizonyitása a teljességi tétel felhasználása nélkül. Ez természetesen a teljességi tétel egy uj bizonyitási módját szolgáltatná, sőt ekkor talán érdemesebb lenne ezt az összefüggést kimondani teljességi tételként. Ehhez a reprezentációtétel közvetlen bizonyitására lenne szükség.

Továbbá, szükség lenne az $\mathcal{L}r$ algebraosztály részletesebb tanulmányozására. Hasonlóan a IV.fejezet felveti a reprezentálható cilindrikus algebrák varietásának használhatóbb egyenletrendszerrel való megadását.

A könyv megjegyzései alapján nagyvonalakban bizonyitható, hogy a IV.fejezetben bevezetett logikára nem definiálható helyettesitési operátor (változójelek). Ennek preciz kimondása és bizonyitása még hátravan.

ALKALMAZOTT JELÖLÉSEK ÉS KONVENCIÓK

A tanulmány teljesen a [Henkin-Monk-Tarski 71] könyvre épül. A könyv jelöléseit és definicióit használjuk. E definiciók egy részét menetközben idézzük. Használunk néhány olyan jelölést is, mely a könyvben nem szerepel. A tanulmányban használt összes jelölés és definició - függetlenül a könyvben való előfordulásuktól - hátul, a definiciójegyzékben megtalálható. A könyvre általában oldalszámmal és definició- ill. tételszámmal hivatkozunk, pl. "Lásd a könyvben 0.1.10., 59 old." a [Henkin-Monk-Tarski 71] 59 oldalán található 0.1.10. -es számu tételre utal.

Kihasználjuk, hogy mely gót és latin betük felelnek meg egymásnak, félreértések elkerülése végett a tanulmányban használt gót betüket a tanulmány végén közöljük.

Az irodalomjegyzékre való hivatkozásnál pl. a [Cohn 65] jelölés P.M.Cohnnak az irodalomjegyzékben felsorolt munkái közül az 1965-ben megjelentre utal. Ha több 65-ben megjelent munkáját soroljuk fel, akkor [Cohn 65a] , [Cohn 65b] , stb.-t irunk.

Háromféle szabványos szövegblokkot használunk, ezek: definició, tétel, megjegyzés. A szövegblokkok végét □ jelzi.

Helyenként a szöveggel szemben, a baloldalon ábrákat és gráfos bizonyitásokat helyeztünk el. Reméljük, hogy ezek kellemesebbé teszik a szöveg olvasását.

A szövegben és formulákban egyes részeket megvastagitottunk. Ezek a kiemelések jelentéssel nem birnak, kizárólag lényegkiemelést, áttekinthetőséget vagy figyelemfelhivást szolgálnak.

A bizonyitásokban a "csakkor" jelet tranzitiv relációjelként használjuk, mely állitások között állhat, és pl. "A csakkor B csakkor C" a következőt jelenti:"A akkor és csak akkor áll fenn, ha B fennáll, és B akkor és csak akkor áll fenn, ha C fennáll."

A bizonyitásokban szereplő tranzitiv jelekhez (csakkor és =) helyenként kis felhőcskékben odairjuk, hogy miből következnek, pl. A = B . .

B definíciója,
0.1.51.

I.

Előzmények

T A R T A L O M

I.2. Algebra fogalma, ℓ-tipusu algebrák, szabadalgebra

$\mathfrak{A}$ egy $t \in {}^{I}\omega$-tipusu struktura $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $(Do\,\mathfrak{A} = I \cup 1 \;\&\; (\forall \varrho \in I)\, \mathfrak{A}_{\varrho} \subseteq {}^{t(\varrho)}\mathfrak{A}_{0})$

$A \overset{d}{=} \mathfrak{A}_{0}$ az $\mathfrak{A}$ alaphalmaza

Algebra egy struktura, ha relációi függvények

ℓ definiciója; $\mathfrak{F}r_{X}$, $\mathfrak{F}r_{X}K$ és $Gr_{X}K$ definiciója

A tanulmány során csak ℓ-tipusu algebrákat vizsgálunk, tehát az a kijelentés, hogy "minden K algebraosztályra", azt jelenti, hogy "minden ℓ-tipusu K algebraosztályra".

Az ℓ-tipusu algebrák egy felirási módja:

$$\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle A, \mathfrak{A}_{\wedge}, \mathfrak{A}_{\neg}, \mathfrak{A}_{\exists_i}, \mathfrak{A}_{=_{ij}} \rangle_{i,j<\omega}$$

I.3. Nevezetes ℓ-tipusu algebrák

CA , Lf , $\mathcal{L}_{A}$, $\mathcal{H}a$, $\mathcal{L}r$ és $\mathcal{R}e$ definiciója

$\mathcal{R}e = \mathbf{SP}\,\mathcal{H}a = \mathbf{HSP}\,Lf \subsetneqq CA$

I.1. Halmazelméleti kérdések.

A dolgozatban néhány halmazelméleti problémát kell megkerülnünk valamilyen módon. Ilyen probléma például, hogy a t-tipusu strukturák osztályát, vagy a cilindrikus algebrák osztályát halmazként kellene kezelni, (természetesen korlátozott keretek között). Ezzel a kérdéssel szembekerülve [Bell 69] egyszerüen kijelenti, hogy megoldható és tovább nem foglalkozik vele, [Cohn 65] pedig a kategóriaelméletben szokásos megoldást*/ választja: un. "univerzális halmazokat" alkalmaz. Mi [Cohn 65] közelitésmódját választottuk: törekszünk arra, hogy amit csinálunk, összeegyeztethető legyen az axiomatikus halmazelmélettel**/, melyben a végtelenségi axioma helyett azt mondjuk ki, hogy minden halmaz eleme valamilyen univerzális halmaznak, ahol:

I1.1D

Definició:

Az $\mathcal{U}$ halmaz <u>univerzális</u>, ha

1./ $X \in \mathcal{U} \Longrightarrow X \subseteq \mathcal{U}$

2./ $X \in \mathcal{U} \Longrightarrow Sb\, X \in \mathcal{U}$

3./ $X, Y \in \mathcal{U} \Longrightarrow \{X, Y\} \in \mathcal{U}$

4./ $Do\, f \in \mathcal{U} \,\&\, Rg\, f \subseteq \mathcal{U} \Longrightarrow \bigcup Rg\, f \in \mathcal{U}$

$\square$

---

*/ Lásd [Sonner 62], [Gabriel 62].

**/ Pl. a Gödel-Bernays halmazelmélettel.

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy valamilyen tetszőleges, de rögzitett $\mathcal{U}$ univerzális halmazon belül dolgozunk: Ha azt mondjuk, hogy A halmaz, ez azt jelenti, hogy $A \in \mathcal{U}$; ha azt mondjuk, hogy A osztály, akkor $A \subseteq \mathcal{U}$. Ezek alól csak az alapfogalmak definiciói (struktura, algebra, direktszorzat, stb.) képeznek kivételt, hiszen épp az a célunk, hogy ezek értelmezve legyenek olyan halmazokra is, melyek nem elemei $\mathcal{U}$-nak. Azonban a cilindrikus algebrák osztályán például már a cilindrikus algebrák "valódi" osztálya és $\mathcal{U}$ metszetét értjük. (Azaz $\mathcal{U}$ azon elemeinek együttesét, melyekre bizonyos feltételek teljesülnek.) Tehát a halmaz fogalom "relativizálása" alól csak az I.2. fejezet kivétel.

Ha azt mondjuk, hogy minden A-hoz van olyan B, melyre P(A,B), ez azt jelenti, hogy minden $A \in \mathcal{U}$ -hoz van olyan $B \in \mathcal{U}$, melyre P(A,B).

Ennek megfelelően a bizonyitásokban mindig ki kellene térni erre a feltételre is. Ez azonban csökkentené az áttekinthetőséget, és elterelné a lényegről a figyelmet. Ezért ezt a kérdést a dolgozat során egyáltalán nem emlitjük, sem a bizonyitásokban, sem másutt; ehelyett a <u>függelékben</u> azokhoz a bizonyitásokhoz, ahol szükségesnek látszik, közöljük a megfelelő kiegészitéseket az univerzális halmazra vonatkozóan.

I.2. Algebra fogalma, ℓ-tipusu algebrák, szabadalgebra.

Az algebrákat és strukturákat egységesen kezeljük (nevezetesen: algebra egy struktura, ha relációi függvények).

Tipusnak olyan függvényt nevezünk, melynek értékkészlete pozitiv egész számokból áll.

Valamely $t \in {}^{I}\omega$ tipusu struktura $(\mathfrak{A})$ egy olyan függvény, melynek értelmezési tartománya $I \cup 1$, és mely függvény I elemeihez relációkat rendel, és a nullához egy olyan halmazt, melyen ezek a relációk értelmezve vannak;*/ a relációk argumentumszámát a t függvény előre rögziti, ugy hogy $\mathfrak{A}_q \subseteq {}^{t(q)}\mathfrak{A}_0$. (Ez a definició [Enderton 72] -ből származik.)

Általában strukturákat gót betükkel jelölünk, és a nulla helyen felvett értéküket (alaphalmazukat) a megfelelő latin nagybetüvel, pl.
$A \stackrel{d}{=} \mathfrak{A}_0$, $B \stackrel{d}{=} \mathfrak{B}_0$, stb.

---

*/ Most a strukturafogalom megszokott használatához célszerü kikötni, hogy $0 \notin I$. Ennek elkerülésére $\mathfrak{A}$-t ugy is definiálhattuk volna, hogy $Do\,\mathfrak{A} = I \cup \{I\}$. Az általunk adott definició szépsége, hogy pl. $\langle\omega, +, \cdot\rangle$ egy algebra (ha + és · függvények ω-n), mert a könyv jelölésrendszere szerint egy sorozatot azonosnak tekintünk egy valamilyen rendszámon értelmezett fügvénnyel.

Most rögzitünk egy olyan tipust, melynek központi szerepe lesz az egész tanulmányban:

$$\ell \overset{d}{=} \{\langle\wedge,3\rangle, \langle\neg,2\rangle, \langle\exists_i,2\rangle, \langle =_{ij},1\rangle : i,j\in\omega\}$$

A fenti tipust általában algebrákra fogjuk vonatkoztatni. Mivel algebrákat speciális strukturákként kezelünk, egy kétargumentumu müvelet háromargumentumu reláció, tehát tipusa három. Mivel a legkisebb érték, amit tipus felvehet: egy, nullaargumentumu müveletek is előfordulhatnak. A nullaargumentumu müveleteket konstnasoknak, illetve megkülönböztetett elemnek tekintjük, tehát pl. $=_{ij}$ egy eleme az ℓ-tipusu szóalgebráknak.

A tanulmány során csak ℓ-tipusu algebrákról beszélünk. Ezért algebrai jelöléseknél, pl. $\mathfrak{F}r_\alpha$ -nál nem jelöljük a tipust, az mindig ℓ. Ilyen kikötést strukturákra nem teszünk, azok tipusa tetszőleges lehet és általában t-vel jelöljük.

Az ℓ-tipusu algebrák központi szerepe miatt és a könyvvel való jelölésbeli összhang érdekében a következő jelöléseket vezetjük be ℓ-tipusu algebrákra:

A jelölések megadása során legyen $\mathfrak{A}$ egy ℓ-tipusu algebra. $\mathfrak{A}$ megadható a következő formában is:

$$\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle A, \mathfrak{A}_\wedge, \mathfrak{A}_\neg, \mathfrak{A}_{\exists_i}, \mathfrak{A}_{=_{ij}}\rangle_{i,j\in\omega}$$

Általában, ha egy ilyen alakunak tekinthető jelöléssel találkozunk, azt a megfelelő ℓ-tipusu algebra megnevezésének tekintjük.

Pl.

$$\langle Sb A, \cap, \smallsetminus, C_i, D_{ij}\rangle_{i,j\in\omega}$$

Az $\mathfrak{A}$ algebra konkrét müveleteire legtöbbször a következő jelölésekkel fogunk hivatkozni (elsősorban mert a könyv állandóan ezeket használja).

$$\mathfrak{A}_\wedge \overset{d}{=} \cdot^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} \cdot$$

$$\mathfrak{A}_\neg \overset{d}{=} -^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} -$$

$$\mathfrak{A}_{\exists_i} \overset{d}{=} c_i^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} c_i$$

$$\mathfrak{A}_{=_{ij}} \overset{d}{=} d_{ij}^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} d_{ij}$$

Eszerint

$$\mathfrak{A} = \langle A, \cdot^{(\mathfrak{A})}, -^{(\mathfrak{A})}, c_i^{(\mathfrak{A})}, d_{ij}^{(\mathfrak{A})} \rangle_{i,j\in\omega} = \langle A, \cdot, -, c_i, d_{ij} \rangle_{ij\in\omega}$$

Levezetett müveletekre is kiterjesztjük ezt a jelölésmódot, és bár pl. $\vee \notin Do\,t$, használjuk az $\mathfrak{A}_\vee$ jelölést, és

$$\mathfrak{A}_\vee \overset{d}{=} +^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} +$$

hasonló szellemben

$$\mathfrak{A}_{\forall_i} \overset{d}{=} \partial_i^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} \partial_i$$

$$\mathfrak{A}_\uparrow \overset{d}{=} 1^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} 1$$

$$\mathfrak{A}_\downarrow \overset{d}{=} 0^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} 0$$

ahol az utóbbi két jelölést csak akkor használjuk, ha $\mathfrak{A}$ teljesiti a Boole-egyenleteket, és ekkor a következő értelemben:

$$\downarrow \overset{d}{=} x \wedge \neg x \quad \text{és} \quad \uparrow \overset{d}{=} \neg\downarrow$$

E jelölések használatával kapcsolatban megjegyezzük, hogy - a könyvvel összhangban - ha azt mondjuk, hogy

$d_{ij} \cdot x = d_{ij} \cdot c_i x$ érvényes (teljesül) $\mathfrak{A}$-ban,

akkor ezt ugy értjük, hogy $(\forall x \in A)\ d_{ij} \cdot x = d_{ij} \cdot c_i x$, vagyis ugy, hogy az

$=_{ij} \wedge x = =_{ij} \wedge \exists_i x$ egyenlet érvényes az $\mathfrak{A}$ algebrában.

Az utóbbi szigoru logikai értelemben is egy olyan formula, melyről mondhatjuk, hogy érvényes $\mathfrak{A}$-ban (az x-et természetesen változójelnek tekintve).

Az ℓ-tipusu algebrák vizsgálatára bevezetjük a $\Delta^{(\mathfrak{A})}$ függvényt, mely az $\mathfrak{A}$ (ℓ-tipusu) algebra minden eleméről megmondja, hogy mely dimenzióktól függ. (A 199 oldalon levő 1.6.1. definiciót idézzük):

$$\Delta^{(\mathfrak{A})} x \overset{d}{=} \{ i : c_i^{(\mathfrak{A})} x \neq x \} .$$

A többi jelöléshez hasonlóan itt is elhagyhatjuk az $(\mathfrak{A})$ indexet, és egyszerüen Δx-et irhatunk.

Az ℓ tipushoz kapcsolódóan megjegyezzük, hogy abból a célból hogy a metanyelvi és a tárgynyelvi logikai jeleket meg lehessen különböztetni, a metanyelvben a következő jeleket használjuk:

$$\&,\ \sim,\ (\exists x),\ x = y,\ \mathbb{V},\ (\forall x).$$

Használjuk még a metanyelvben a $\Longrightarrow$ és $\Longleftrightarrow$ jeleket is.

A szabadalgebra jelölésében is ki fogjuk használni azt, hogy kizárólag ℓ-tipusu algebrákkal dolgozunk:

Legyen X egy tetszőleges halmaz.

$\mathfrak{Fr}_X$ az X halmazzal generált teljesen szabad ℓ-tipusu algebrát jelöli.

$\mathfrak{Fr}_X$ alaphalmazát (tehát $\mathfrak{Fr}_X(0)$-t) Fr_X -vel jelöljük.*/ A definició megtalálható a 13o oldalon: o.4.19. a $\{\langle +,3\rangle\}$-tól eltérő (tehát pl. ℓ) tipusokra pedig o.4.2o. A könyvbeli definiciótól annyiban térünk el, hogy nálunk X tetszőleges halmaz lehet, nemcsak rendszám. Ezzel jelölésrendszerünk nem lett általánosabb, hiszen $\mathfrak{Fr}_X \cong \mathfrak{Fr}_{|X|}$.

Ezt a fogalmat más szerzők (pl. Cohn) szóalgebrának nevezik, rövidsége miatt mi is ezt a megnevezést fogjuk használni.

$\mathfrak{Fr}_X K$ a K algebraosztály X-el generált szabadalgebrája, és

$Cr_X K$ a hozzátartozó kongruenciareláció ugy, hogy

$$\mathfrak{Fr}_X K \overset{d}{=} \mathfrak{Fr}_X / Cr_X K .$$

A definiciót ld. 13o.o. o4.19.

---

*/ A teljesen szabad algebra definiciója:

A müveletek $\mathfrak{Fr}_X$ -en: $\mathfrak{Fr}_X(r)(\alpha_2,\dots,\alpha_{\ell_r}) \overset{d}{=} \langle r,\langle \alpha_2,\dots,\alpha_{\ell_r}\rangle\rangle$;

Fr_X a legkisebb olyan halmaz, mely zárt ezekre a müveletekre és tartalmazza X-et. Ha r nullaargumentumu müvelet (azaz konstans) neve, akkor $\mathfrak{Fr}_X(r) \overset{d}{=} r \in Fr_X$.

A $\subseteq$ halmazelméleti jel értelmezését algebrákra (és általában struktúrákra) változatlanul átvesszük a könyvből, avval a különbséggel, hogy a $\subseteq$ jelet módositjuk abból a célból, hogy eltérjen a halmazelméleti megfelelőjétől:

ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két t -tipusu struktura, akkor

$$\mathfrak{A} \sqsubseteq \mathfrak{B} \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall r \in \mathrm{Do}\,\mathfrak{A})\ \mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{B}_r .$$

I.3. Nevezetes ℓ -tipusu algebrák.

A következőkben a könyvből idézzük néhány nevezetes (ℓ-tipusu) algebra-osztály definicióját:

A cilindrikus algebrák osztályát CA-val jelöljük és - verietásként - egyenletrendszer segitségével definiáljuk, (a könyv 1.1.1. definiciója szerint, 162.oldal.):

$\mathfrak{A}$ cilindrikus algebra $(\mathfrak{A} \in \mathrm{CA})$, ha minden $x, y, z \in A$ és $i, j, n \in \omega - r\alpha$ igaz, hogy:

(C0) $\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A}$ Boole-algebra*/, azaz

a./ $x \cdot y = y \cdot x$

b./ $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

c./ $x \cdot 1 = x$

(C1) $c_i 0 = 0$

(C2) $x \leq c_i x$ $\quad$ (azaz $x + c_i x = c_i x$)

(C3) $c_i(x \cdot c_i y) = c_i x \cdot c_i y$

(C4) $c_i c_j x = c_j c_i x$

(C5) $d_{ii} = 1$

(C6) $i \neq j, n \implies d_{jn} = c_i(d_{ji} \cdot d_{in})$

(C7) $i \neq j \implies c_i(d_{ij} \cdot x) \cdot c_i(d_{ij} \cdot -x) = 0$

---

*/ $\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A} \overset{d}{=} \{0, \wedge, \neg\} \upharpoonright \mathfrak{A}$

13.1M
Megjegyzés:

Emlékeztetünk arra, hogy nálunk a $+, 1, 0$ jelek csak röviditései bizonyos, a $\cdot$ és $-$ jelekkel felirható sémáknak.

A könyv a (CO) feltételt nyolc egyenlettel adja meg. Annak bizonyitása, hogy az általunk megadott három egyenlet valóban definiálja a Boole-algebrák varietását, megtalálható az [Andréka-M.Pajzs-Németi 73] cikkben. (Ezzel a háromegyenletes definicióval még nem találkoztunk az irodalomban.) Ugyanezen cikk második felében található némi elvi indoklás arra, hogy miért tértünk el a könyvtől a $+, 1$ és 0 jelek tekintetében.

□

Definiáltuk tehát a CA varietást, és mivel csak az ω dimenziós CA varietásra van szükségünk, a könyvtől eltérően CA_ω helyett egyszerüen CA-t irunk. Hasonlóan fogunk eljárni a többi definiciónál is, pl. halmazalgebrán ω-dimenziós (cilindrikus) halmazalgebrát értünk, Lf azt jelenti, hogy Lf_ω stb.

A lokálisan véges cilindrikus algebrák osztályát Lf jelöli (a könyv 1.11.1. definiciója szerint, 231 oldal.) :

$$Lf \stackrel{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in CA : (\forall x \in A)\ |\Delta^{(\mathfrak{A})} x| < \omega \}$$

Legyen A egy tetszőleges halmaz. Az A -hoz tartozó <u>teljes</u> (cilindrikus) <u>halmazalgebra</u> (a könyv 1.1.5. definiciója szerint, 166 oldal.) :

$$\mathcal{L}_A \stackrel{d}{=} \langle Sb\,{}^{\omega}A, \cap, \smallsetminus^{(A)}, C_i^{(A)}, D_{ij}^{(A)} \rangle_{i,j\in\omega}$$

ahol:

$$\smallsetminus^{(A)} X \stackrel{d}{=} {}^{\omega}A \smallsetminus X$$

$$C_i^{(A)} X \stackrel{d}{=} \{ s \in {}^{\omega}A : (\exists s' \in X)(\forall j \in \omega \smallsetminus \{i\})\; s'_j = s_j \}$$

vagy tömörebben

$$C_i^{(A)} X \stackrel{d}{=} \{ s \in {}^{\omega}A : (\exists x \in X)\; s \smallsetminus x \subseteq \{i\} \times A \}$$

és

$$D_{ij}^{(A)} X \stackrel{d}{=} \{ s \in {}^{\omega}A : s_i = s_j \}$$

Az (A) indexet általában elhagyjuk, ahol ez nem okozhat félreértést; tehát pl. D_{ij} -t irunk $D_{ij}^{(A)}$ helyett.

<u>A halmazalgebrák osztálya</u>:

$$\mathsf{Ha} \stackrel{d}{=} \mathsf{S}\, \{ \mathcal{L}_A : A \text{ tetszőleges halmaz} \}$$

A <u>lokálisan</u> függetlenül <u>véges halmazalgebrák</u>:

$$\mathsf{Lv} \stackrel{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in \mathsf{Ha} \cap \mathsf{Lf} : (\forall a \in A)(s \in a \Leftrightarrow (\exists z \in a)(\forall i \in \Delta a)\, s_i = z_i) \}$$

Megjegyezzük, hogy $\mathsf{Lv} \neq \mathsf{Ha} \cap \mathsf{Lf}$. Az Lv algebraosztályt a könyv nem definiálja.

<u>A reprezentálható cilindrikus algebrák varietása:</u>

(A könyvben 1.1.13., 171 oldal vagy 16 – 18 oldal.) :

$$\mathsf{Re} \overset{d}{=} \mathsf{HSP}\ \mathcal{H}a$$

Megjegyezzük, hogy a Re algebraosztály megadható egy rendkivül szemléletes definicióval is (a 171 oldalon a 3.bekezdés), mely lehetővé teszi, hogy Re vizsgálatakor erősen támaszkodjunk geometriai intuicióra.

A következőkben idézünk <u>néhány alapvető összefüggést</u> a könyvből az eddig idézett algebraosztályokra vonatkozóan:

$$\mathsf{Re} = \mathsf{SP}\ \mathcal{H}a \qquad (\text{azaz } \mathsf{HSP}\ \mathcal{H}a = \mathsf{SP}\ \mathcal{H}a)$$

(Lásd a könyv 1.1.13. definiciója, 172.oldal vagy [Monk 61] .)

Ezt az összefüggést a könyv bizonyitás nélkül közli, a bizonyitás a második részben fog megjelenni.

(Az olyan összefüggéseket, melyek bizonyitása csak a második részben fog megjelenni, csak megjegyzésekben használtuk fel, bizonyitásokban nem.)

$$\mathsf{Re} \neq CA$$

Mindazonáltal a Re varietásra is ismeretes definiáló egyenletrendszer ugyanugy, mint (C0) – (C7) a CA varietásra. Egy ilyen egyenletrendszer meg fog jelenni a könyv második részében. Ezt az egyenletrendszert azonban mindezideig nem sikerült olyan egyszerü és áttekinthető formában megadni, mint pl. (C0) – (C7

(Lásd a könyvben az 1.1.13. definiciót (172 oldal) és 17 – 18 oldal.)

$$\mathcal{H}a \subseteq \mathsf{CA}$$

Ez a könyv 1.1.6. tétele.

$$\mathcal{R}e = \mathbf{HSP}\ \mathsf{Lf}$$

A könyv 2.6.53. alatt közli bizonyitás nélkül, bizonyitása megtalálható [Henkin-Tarski 61]-ben.

A jelen munkában bizonyitani fogjuk, hogy

$$\mathbf{SP}\ \mathsf{Lf} = \mathbf{SP}\ \mathcal{L}v\ .$$

II.

Logikai és cilindrikus algebrai előkészitő vizsgálatok

T A R T A L O M

II.1.

A logika fogalma

TARTALOM

II1.1D: Logika az $\langle \mathcal{F}, k \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow}$ szóalgebra az $\mathcal{F}$ &

$\& (\exists T, M)(Rg\, k \subseteq {}^{M}T \;\&\; (\forall X \in M)\, \varepsilon_X \circ k \in Ho\, \mathcal{F})$

II1.1M: Milyen meggondolások alapján választottuk ezt a logika-fogalmat.

Példa arra, hogy $(\forall X \in M)\, \varepsilon_X \circ k \in Ho\, \mathcal{F}$ nem helyettesithető $k \in Ho\, \mathcal{F}$-el.

II1.2D: $\langle \mathcal{F}_1, k_1 \rangle$ egyenértékű $\langle \mathcal{F}_2, k_2 \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} k_1^* \mathcal{F}_1 = k_2^* \mathcal{F}_2$

$\langle \mathcal{F}_1, k_1 \rangle$ ekvivalens $\langle \mathcal{F}_2, k_2 \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} k_1^* \mathcal{F}_1 = k_2^* \mathcal{F}_2$ &

$\& (\exists$ rekurzív $g_1, g_2)(k_1 = k_2 \circ g_1 \;\&\; k_2 = k_1 \circ g_2)$

II.1. A logika fogalma

A következőkben - a predikátumkalkulustól függetlenül - a logika fogalmára adunk egy általános definiciót, definiáljuk továbbá, hogy mikor nevezünk két logikát egyenértékünek és mikor ekvivalensnek.

II1.1D

Definició:

Logika az $\langle \mathcal{F}, k \rangle$ pár, ha

1./ $\mathcal{F}$ egy (nem feltétlenül ℓ-tipusu) szóalgebra

2./ Tartozik az $\langle \mathcal{F}, k \rangle$ párhoz egy

T osztály (melynek elemeit az adott logika **igazságértékeinek** nevezzük), és egy

M osztály (melynek elemeit a logika **interpretációinak** vagy **modelljeinek** nevezzük),

ugy hogy

$Rg\, \mathbf{k} \subseteq {}^{M}T$ és

$(\forall X \in M)\ \varepsilon_X \circ \mathbf{k} \in Ho\, \mathcal{F}$

□

Az F halmazt a logika nyelvének, elemeit formuláknak nevezzük,

k az interpretálófüggvény és

k^* $\mathcal{F}$ a szemantikus algebra,

k° a szemantikus ekvivalencia,

$\mathcal{F}/k^\circ$ összes faktoralgebrájával együtt képezi a formulaalgebrák halmazát,

$\mathcal{F}/k^\circ$ a tautologikus formulaalgebra.

Az igazságértékek jellemzik a formulák és az interpretációk közti kapcsolatot, $k(\varphi)_X$ a φ formula igazságértéke az X interpretációban. (Nyilván, a T osztály komplexitásától erősen függ a logika "kifejezőereje".) A k függvény minden formuláról megmondja, hogy hogyan viszonyul az egyes interpretációkhoz, azaz a $k(\varphi)$ függvény az egyes interpretációkhoz hozzárendeli azt az igazságértéket, melyet a φ felvesz bennük.

III.1M

Megjegyzés:

Fent a logikát csak röviden definiáltuk, indoklás nélkül, most összefoglalnánk, hogy milyen meggondolások alapján választottuk ezt a logika-fogalmat. (Ezek a meggondolások bizonyos mértékig kapcsolódnak a mesterséges intelligencia és az adekvát nyelvek elmélete kutatásának problémáihoz, lásd pl. [Hayes 71]).

Abból indulunk ki, hogy M azon interpretációk (azon jelenségkörök) osztálya, melyekről beszélni szeretnénk. T azon igazságértékeknek osztálya, melyeken keresztül szeretnénk beszélni M elemeiről: T megválasztásakor döntjük el, hogy milyen "árnyaltsággal" akarunk beszélni M elemeiről.

Az igy körvonalazott feladat végrehajtásához választjuk eszközül az F nyelvet és a k interpretálófüggvényt. Pontosabban, a feladatot M és T megválasztásakor még nem specifikáltuk teljesen, ehhez még kiválasztunk egy $K \subseteq {}^{M}T$ halmazt, mely mostmár véglegesen rögziti a nyelv kifejezőerejét: azt kivánjuk, hogy K minden eleméhez tartozzon legalább egy formula F-ből, azaz $k^{*}F \supseteq K$ legyen. Az egyszerüség érdekében tételezzük fel, hogy $k^{*}F = K$. E keretek között F megválasztására tág lehetőségeink vannak: $\overset{\circ}{k}$ tükrözi F-ben a felesleget, $F/\overset{\circ}{k}$ elemei szinonimahalmazok.

Összefoglalva, az $\langle \mathcal{F}, k \rangle$ párra ugy tekintünk, mint eszközre, mely M-nek T és K keretek közötti vizsgálatára szolgál.

Talán érdemes itt még kicsit továbbvinni az előző meggondolásokat:

Az igazságértékek közti kapcsolatok rögzitésével strukturát rögzitünk T-n, és mivel

$$k : F \longrightarrow {}^{M}T$$

ez a struktura visszavetithető F-re k mentén. Ahhoz, hogy az igazság-

értékek F -beli követésére megfelelő szintaktikai definiciót tudjunk adni, F szintaktikai szerkezetének összhangban kell lennie ezzel a visszavetitett strukturával. (Ezen tulmenően F szerkezete más dolgokat, pl. kényelmi és történeti szempontokat is tükrözhet.)
Emiatt rögzitjük, hogy $\mathcal{F}$ egy szóalgebra legyen, melyről k homomorf függvény ${}^{M}T$ -be.

Legyen most $k^{*}\mathcal{F} \stackrel{d}{=} \tilde{\mathfrak{A}}$. Ha az elmélet szerkesztését az előzőek szerint végeztük, akkor $\tilde{\mathfrak{A}}$ részstrukturája ${}^{M}T$ -nek (illetve az előzőekben rajta értelmezett strukturának).
Ezenkivül $\tilde{\mathfrak{A}}$ részdirekt-szorzata az egyes X interpretációkhoz tartozó igazságértékalgebráknak (T részstrukturáinak), az $\varepsilon_X^{*}\tilde{\mathfrak{A}}$ algebráknak.
Eszerint $\tilde{\mathfrak{A}}$ szerkezetét az egyes X interpretációkhoz tartozó szerkezetekből nyertük. Ennek megfelelően $\mathcal{F}$ szerkezete sem tükrözhet lényegesen többet, mint ami az egyes X -ekhez tartozó szerkezetekből következik.
Ezt rögziti az utolsó kikötés: $\varepsilon_X \circ k \in \mathrm{Ho}\,\mathcal{F}$. Erre a kikötésre szükség van, hiszen az elmélet felépitésének fenti gondolatmenetét nem formalizáltuk, és igy nem rögzithettük a definicióban.

Azt, hogy a fenti kikötés nem helyettesithető $k \in \mathrm{Ho}\,\mathcal{F}$ -el, illusztrálja a következő példa:

Példa:

Tekintsük az $\langle \mathcal{F}, b \rangle$ párt,

ahol $\mathcal{F}$ az elsőrendü t -tipusu formulák halmaza, mint szóalgebra. (Pontosabb definició később következik.)

$$M \stackrel{d}{=} \{ \langle \mathfrak{A}, s \rangle : \mathfrak{A} \text{ egy } t\text{-tipusú struktura}, s \in {}^{\omega}A \}$$

$$T \stackrel{d}{=} \{ \uparrow, \downarrow \}$$

$$b(\varphi)_{\langle \mathfrak{A}, s \rangle} \stackrel{d}{=} \begin{cases} \uparrow & \text{, ha } \mathfrak{A} \models \varphi[s] \\ \downarrow & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Látszik, hogy b° az elsőrendü logika szokásos szemantikus ekvivalenciája (tehát $b \in Ho\, \mathcal{F}$).

Kérdés, hogy $\langle \mathcal{F}, b \rangle$ logika-e?

Ehhez azt kell eldöntenünk, hogy $(\forall \mathfrak{A}, s)\ \varepsilon_{\langle \mathfrak{A}, s \rangle} \circ b \in Ho\, \mathcal{F}$ igaz-e.

A következő két összefüggésből tisztán látszik, hogy nem:

1./ $\mathfrak{Bl}\ \mathcal{F}/b^{\circ}$ -nak U ultraszürője $\Longleftrightarrow$ $(\exists \mathfrak{A}, s)(U \in F/(\varepsilon_{\langle \mathfrak{A}, s \rangle} \circ b)^{\circ} \;\&\; U \ni 1^{\mathcal{F}}$

Ezt a tételt [Andr.72] -ban mondtuk ki és bizonyitottuk, az irodalomban máshol még nem találkoztunk vele. (Lásd [Andr.72; T35])

2./ Van olyan ultraszürője $\mathfrak{Bl}\ \mathcal{F}/b^{\circ}$ -nak, mely nem kongruenciaosztály $\mathcal{F}$ -en. (Lásd [Andr.72; T31T41K])

Ezzel a példa teljes: az $\langle \mathcal{f}, b \rangle$ pár nem logika, annak ellenére, hogy $b \in Ho\, \mathcal{f}$.

Megjegyezzük, hogy a $\langle \mathcal{Bl}\, \mathcal{f}, b \rangle$ pár már logika.

Megjegyezzük még, hogy az itt bevezetett logikafogalom nemcsak a jelen tanulmányban előforduló logikafajtákat fedi, hanem ezektől olyan távolállókat is, mint pl. a Boole-értékü modellelmélethez tartozó rendszer. (Lásd [Zeitsch.73.Heft 3])

□

A logika fogalmához kapcsolódóan még két definiciót szeretnénk bevezetni:

III.2D

Definició:

Két logika <u>egyenértékü</u>, ha szemantikus algebrájuk megegyezik, azaz

$$\langle \mathcal{f}_1, k_1 \rangle \text{ egyenértékű } \langle \mathcal{f}_2, k_2 \rangle\text{-vel} \quad \overset{d}{\Longleftrightarrow} \quad k_1^* \mathcal{f}_1 = k_2^* \mathcal{f}_2$$

Két logika <u>ekvivalens</u>, ha egyenértéküek, és nyelveik között megadhatók forditási szabályok szintaktikai eszközökkel, azaz van olyan rekurziv g_1 és g_2 szövegfüggvény, hogy

$$k_1 = k_2 \circ g_1 \qquad \text{és} \qquad k_2 = k_1 \circ g_2 \;.$$

□

II.2.

Az elsőrendü predikátumkalkulus

TARTALOM

Az elsőrendü predikátumkalkulus $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k^{M_t} \rangle$, ahol

ϑ az egész dolgozat folyamára rögzitett ω-n értelmezett kölcsönösen egyértelmü függvény

$$P_t \overset{d}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} (t^{-1*}n \times {}^nRg\,\vartheta)$$

$\mathfrak{F}_{P_t}$-ben a szokásos egyszerüsitéseket használjuk.

$$k^N \in Hom(\mathfrak{F}_{P_t}, \underset{\mathfrak{A}\in N}{\mathbb{P}} \mathcal{L}_A)\ ;\ k^N(rv_{i_1}\dots v_{i_{t_r}}) \overset{d}{=} \langle \{ s \in {}^{\omega}A : \langle s_{i_1},\dots,s_{i_{t_r}} \rangle \in \mathfrak{A}_r \} \rangle_{\mathfrak{A}\in N}$$

M_t a t-tipusu strukturák osztálya

II2.1M: Homomorf függvényeket szabad generátorrendszeren adunk meg.

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \overset{d}{\Longleftrightarrow} s \in k^{M_t}(\varphi)_{\mathfrak{A}}$$

$$\equiv_N \overset{d}{=} (k^N)^o$$

II2.1T: $\varphi \equiv_N \psi \Longleftrightarrow (\forall \mathfrak{A}\in N, s)(\mathfrak{A} \models \varphi[s] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi[s])$

II2.2T: $\equiv_N \in Co\, \mathfrak{F}_{P_t}$

Az M_t indexet általában elhagyjuk.

II2.3T: $\mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv_N} \in CA$

II2.2M: Az it.kalk. a Boole-alg.k segitségével felépithető avval analóg módon, ahogyan a cilindrikus alg.k segitségével felépitettük a pred.kalk.t.

II.2. Az elsőrendü predikátumkalkulus.

A következőkben az elsőrendü predikátumkalkulus szokásos változatát vezetjük be az előző logikafogalomnak megfelelően.

Az egész dolgozat során ϑ egy ω-n értelmezett kölcsönösen egyértelmü függvény.

Változóhalmazként $Rg\, v$ -t használjuk.

Rögzitsünk valamilyen $t \in {}^{I}\omega$ tipust.

A t-tipusu primformulák halmaza:

$$P_t \stackrel{d}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(t^{-1*}n \times {}^{n}Rg\, v \right)$$

(Azaz, ha pl. r egy n-változós relációjel, ill. $t_r = n$, akkor $\langle r, \langle v_1, \dots, v_n \rangle\rangle \in P_t$.)

Most a t -tipusu formulák halmaza F_{P_t}

(Pl. $\langle \wedge, \langle \exists_2, \langle r, \langle v_1, \dots, v_n \rangle\rangle\rangle, =_{20} \rangle$ egy elsőrendü formula.)

Formulákra a nekik megfelelő szöveggel hivatkozunk:

$\wedge\exists_2 r v_1 \ldots v_n =_{20}$ a fenti formula neve.

A szokásos egyszerüsitett irásmódokat is alkalmazzuk, pl. infix jelölés:

$\exists_2 r v_1 \ldots v_n \wedge =_{20}$ szintén a fenti formula neve.

M_t -vel jelöljük a t -tipusu strukturák osztályát.

Legyen $N \subseteq M_t$.

Definiáljuk a $k^N \in Hom(\mathfrak{F}_{P_t}, \underset{\mathfrak{Cl}\in N}{\mathbb{P}} \mathcal{L}_A)$ függvényt a következő össze-függésekkel: */

minden $r \in I$ és $i \in {}^{\omega}\omega$ -ra

$$k^N(r v_{i_1} \ldots v_{i_{t_r}}) \stackrel{d}{=} \langle \{ s \in {}^{\omega}A : \langle s_{i_1}, \ldots, s_{i_{t_r}} \rangle \in \mathfrak{Cl}_r \} \rangle_{\mathfrak{Cl}\in N}$$

Mivel P_t szabadon generálja $\mathfrak{F}_{P_t}$ -t, ez a definició jó.

II2.1M

Megjegyzés:

Ilyen szellemü definiciókat gyakran fogunk alkalmazni, és mivel a definició jóságát a fentivel analóg módon kellene minden esetben indokolni, ezeket az indokolásokat elhagyjuk.

□

*/ A könyvből idézzük, hogy $\langle f_x \rangle_{x\in H} \stackrel{d}{=} \{ \langle x, f_x \rangle : x \in H \}$, azaz egy függvényt jelöl, ahol f_x valamilyen x -től függő kifejezés.

Az elsőrendü predikátumkalkulus szokásos változatát mi azonositjuk az

$\langle \mathfrak{F}_{\mathfrak{P}_t}, k^{M_t} \rangle$ logikával.

Rögzitjük a $\models$ jel használatát:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} s \in k^{M_t}(\varphi)_{\mathfrak{A}}$$

A szemantikus ekvivalenciára önálló jelet vezetünk be:

$$\equiv_N \stackrel{d}{=} (k^N)^o$$

Most példaképpen bizonyitunk egy tételt, mely azt mutatja, hogy a fent bevezetett $\equiv_N$ fogalom egybeesik a szokásosan definiálttal:

II2.1T

Tétel:

$$\varphi \equiv_N \psi \iff (\forall \mathfrak{A} \in N, s)(\mathfrak{A} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{A} \models \psi[s])$$

Bizonyitás:

$$\varphi \equiv_N \psi \quad \text{csakkor} \quad k^N(\varphi) = k^N(\psi) \quad \text{csakkor} \quad (\forall \mathfrak{A} \in N)\, k^N(\varphi)_{\mathfrak{A}} = k^N(\psi)_{\mathfrak{A}}$$

$\square$

II2.2T

Tétel:

$$\equiv_N \in Co\, \mathfrak{Fr}_{P_t}$$

Bizonyitás:

$$k^N \in Ho\, \mathfrak{Fr}_{P_t}$$

□

Az $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t}, k^N \rangle$ **logika szemantikus algebráját** $\mathfrak{A}^N$ **-el jelöljük,**

azaz

$$\mathfrak{A}^N \stackrel{d}{=} k^{N*}\, \mathfrak{Fr}_{P_t}$$

$N = M_t$ gyakori előfordulása miatt az M_t **indexet általában elhagyjuk,**

pl. $\equiv \stackrel{d}{=} \equiv_{M_t}$, $k \stackrel{d}{=} k^{M_t}$, $\mathfrak{A} \stackrel{d}{=} \mathfrak{A}^{M_t}$, stb.

II2.3T

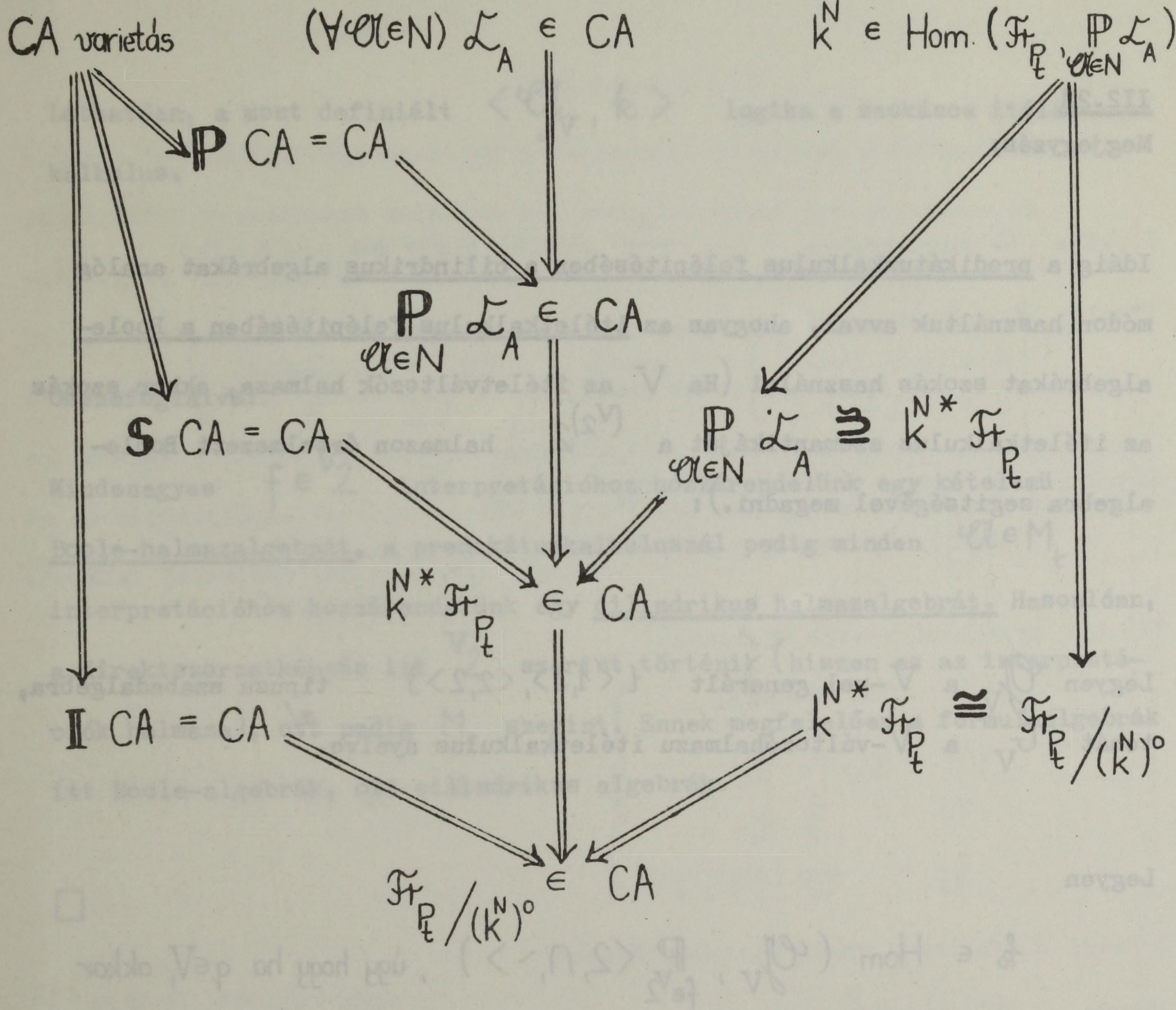
Tétel:

$$\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv_N} \in CA$$

Bizonyitás:

Mivel k^N homomorf függvény, azért $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ -nek k^N szerinti képe – mely **izomorf** $\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv_N}$ -nel – **részalgebrája** a $\mathcal{L}_A$ cilindrikus algebrák **direktszorzat**ának ($\mathfrak{A} \in N$ szerint). Igy, mivel CA varietás lévén zárt az $\mathbb{I}, \mathbb{S}, \mathbb{P}$ operációkra, $\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv_N}$ is eleme CA -nak.

□



Ábra II2.3T - hez

Ez a tétel megtalálható a könyvben(1.1.1o), de egészen más bizonyitással.

II2.2M

Megjegyzés:

Idáig a predikátumkalkulus felépitésében a cilindrikus algebrákat analóg módon használtuk avval, ahogyan az itéletkalkulus felépitésében a Boole-algebrákat szokás használni (Ha V az itéletváltozók halmaza, akkor szokás az itéletkalkulus szemantikáját a ${}^{({}^V2)}2$ halmazon értelmezett Boole-algebra segitségével megadni.):

Legyen $\mathcal{G}_V$ a V-vel generált $\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ tipusu szabadalgebra,*/ tehát G_V a V-változóhalmazu itéletkalkulus nyelve.

Legyen

$$k \in Hom\left(\mathcal{G}_V, \underset{f\in {}^V2}{\mathsf{P}} \langle 2, \cap, \smallsetminus \rangle\right), \text{ úgy hogy ha } q \in V, \text{ akkor}$$

$$k_q \stackrel{d}{=} \langle f_q \rangle_{f\in {}^V2} \quad , \quad \text{azaz} \quad k_q \stackrel{d}{=} {}^V2 \upharpoonright \varepsilon_q$$

*/ REméljük, nem zavaró, hogy a rövidség érdekében az $\wedge$ jel helyett 1-t, a $\neg$ jel helyett pedig 2-t használunk ennél az itéletkalkulusnál.

Ismét bevezethetjük a következő jelölést:

$$f \models \varphi \overset{d}{\Longleftrightarrow} 0 \in k(\varphi)_f$$

Láthatóan, a most definiált $\langle \mathcal{G}_V, k \rangle$ logika a szokásos ítéletkalkulus.

Összefoglalva:

Mindenegyes $f \in {}^V 2$ interpretációhoz hozzárendelünk egy kételemű Boole-halmazalgebrát, a predikátumkalkulusnál pedig minden $\mathfrak{A} \in M_t$ interpretációhoz hozzárendelünk egy cilindrikus halmazalgebrát. Hasonlóan, a direktszorzatképzés itt ${}^V 2$ szerint történik (hiszen ez az interpretációk halmaza), ott pedig M_t szerint. Ennek megfelelően a formulaalgebrák itt Boole-algebrák, ott cilindrikus algebrák.

□

II.3.

Gödel teljességi tétel

TARTALOM

II3.1D: D szuprémumtartó A-ban $\overset{d}{\iff}$ $(\forall B\in A)(B \not\emptyset D \iff \sup_{\leq_H} B \in D)$

II3.1L: $\left.\begin{array}{l} \leq_H \text{ Boole-rendezés} \\ A \subseteq Sb\, H,\ |A| \leq \omega \\ a \in H \setminus \{\inf_{\leq_H} H\} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\exists D)\left\{\begin{array}{l} D \text{ ultraszűröje } \leq_H\text{-nak} \\ D \text{ szuprémumtartó } A\text{-ban} \\ D \ni a \end{array}\right.$

II3.2D: $\varphi \leq \psi \overset{d}{\iff} (\forall \mathfrak{A})\ k(\varphi)_{\mathfrak{A}} \subseteq k(\psi)_{\mathfrak{A}}$

$\varphi(v_i/v_j)$: φ-ben v_i-t összes szabad előfordulásán kicseréljük v_j-re.

II3.1T: egyenlőségmentes logikában

$\left.\begin{array}{lll} \lesssim/_{\lesssim^\bullet} & \text{Boole-rendezés} & \\ \varphi\wedge\psi & \in \varphi/_{\lesssim^\bullet} \wedge_{\lesssim} \psi/_{\lesssim^\bullet} & \\ \neg\varphi & \in \neg_{\lesssim}\, \varphi/_{\lesssim^\bullet} & \\ \exists_i\varphi & \in \sup_{\lesssim} \{\varphi(v_i/v_j) : j\in\omega\} & \end{array}\right\} \Longrightarrow \leqslant \subseteq \lesssim$

A tétel bizonyitása során használt lemmák:

II3.2L: $\left.\begin{array}{l} D \text{ ultraszűröje } \lesssim/_{\lesssim^\bullet}\text{-nak} \\ D \text{ szuprémumtartó } \{\{\varphi(v_i/v_j) : j\in\omega\} : i\in\omega, \varphi\in F\}\text{-ben} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \varphi\wedge\psi \in UD & \iff & \varphi,\psi \in UD \\ \neg\varphi \in UD & \iff & \varphi \notin UD \\ \exists_i\varphi \in UD & \iff & (\exists y)\ \varphi(v_i/y) \in UD \end{array}\right.$

II3.3L: ———— ‖ ———— $\Longrightarrow (\exists\mathfrak{A})(\varphi \in UD \iff v \in k(\varphi)_{\mathfrak{A}})$

II3.1TK: Egyenlőséges logikában $\lesssim$-nek még azt is ki kell fejeznie, hogy $\mathfrak{A}_=$ univerzális kongruencia.

II3.1M: Néhány szinonima.

II3.2M: A $\leqslant$ reláció egy másfajta előállitását is szolgáltatja a tétel.

II3.3M: A tétel használata kalkulusok teljességének ellenőrzésére.

II.3. Gödel teljességi tétel.

Ebben a fejezetben bebizonyitjuk a teljességi tétel egy általánositott változatát: tetszőleges kalkulus teljességére adunk egy szükséges és elégséges, tisztán algebrai feltételt. Ezt azért tesszük, mert a későbbiekben a teljességi tételre ebben a formában lesz szükségünk.*/ Ettől függetlenül a teljességi tétel most bizonyitandó változata beleillik a tanulmányba, hiszen annak célja logikai összefüggések tisztán algebrai megfogalmazása és bizonyitása. Megfogalmazzuk még a tétel néhány szinonimáját, melyek algebrai jelentése talán szemléletesebb.

---

*/ A "reprezentáció tétel" bizonyitásánál.

A tétel bizonyitása a Tarski lemmán alapszik, mely a Boole-algebrák elméletéhez tartozik:

II3.1D

Definició:

Legyen $\langle H, \leqslant_H \rangle$ Boole-rendezés struktura,

D ennek egy ultraszürője, és

$A \subseteq Sb\, H$

Azt mondjuk, hogy D **szuprémumtartó** A **-ban,** ha:

$$(\forall B \in A)\,(B \not\subseteq D \iff \sup_{\leqslant_H} B \in D)$$

□

II3.1L

Tarski lemma:

Ha $\langle H, \leqslant_H \rangle$ egy Boole-rendezés struktura,

A megszámlálható része $Sb\, H$ -nak, és

$\inf_{\leqslant_H} H \neq a \in H$,

akkor van egy $D \ni a$ szuprémumtartó $(A$ -ban$)$ ultraszürője $\langle H, \leqslant_H \rangle$-nak.

Megjegyzés: Ennek a tételnek egy, a szokásos (pl. [Bell 69] -ben található) -nál egyszerübb bizonyitását közöljük a függelékben.

□

A tétel kimondása előtt néhány definiciót kell rögzitenünk.

II3.2D

Definició:

A továbbiakban φ és ψ két tetszőleges formulát jelöl.

A k függvény a formulákon nemcsak egy ekvivalenciát, hanem egy előrendezést*/ is definiál:

$$\varphi \leq \psi \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} (\forall \mathfrak{A})\ k(\varphi)_{\mathfrak{A}} \subseteq k(\psi)_{\mathfrak{A}}$$

Megjegyezzük, hogy $\leq^{\bullet} = \equiv$.

---

*/

Előrendezés egy reflexiv és tranzitiv reláció.

A rendezésekre értelmezett fogalmak mind értelmezhetők előrendezésekre is. Érdemes lenne kidolgozni az előrendezések elméletét is, hiszen nagyon sok tétel (mint pl. a most közlendő általánositott Gödel-tétel) kimondása és bizonyitása egyszerübb lenne ezáltal. [Andr.72] -ban kisérletet tettünk egy ilyen elmélet létrehozására, azonban itt ezt nem fogjuk felhasználni, hiszen az ott bevezetett definiciók nem közismertek, és igy mindet idézni kellene.

Legyen $\langle H, \leq_H \rangle$ egy előrendezés-struktura. [Cohn 65] -ből vagy [Andr. 72] -ből idézzük a **szuprémum előrendezéseken** használatos definicióját:

$$\sup_{\leq_H} B \stackrel{d}{=} \{ a : (\forall b \in B) b \leq_H a, (\forall c)((\forall b \in B) b \leq_H c \Rightarrow c \leq_H a) \}$$

$\varphi(v_i/v_j)$ azt a formulát jelöli, melyet a φ-ből ugy kapunk, hogy v_i összes szabad előfordulását kicseréljük v_j -re, miközben a kötött változókat átnevezzük, ha szükséges.*/

Ha $s \in {}^{\omega}A$, akkor

$$s(i/a) \stackrel{d}{=} \langle s_0, \dots, s_{i-1}, a, s_{i+1}, \dots \rangle$$

□

---

*/

A könyv a 14. oldalon közli ugyanezt a verbális definiciót. A pontos definiciót a függelékben közöljük.

III.1T

Tétel: (Általánositott Gödel teljességi)

Legyen $\langle \mathcal{F}, k \rangle$ a t-tipusu <u>egyenlőségmentes</u> predikátumkalkulus.

Ekkor

$$\leq \; \subseteq \; \preccurlyeq$$ minden olyan esetben fennáll,

ha

1./ $\preccurlyeq / \preccurlyeq^{\bullet}$ egy Boole-rendezés,

és az ehhez tartozó Boole-algebrát

$\langle F_{\preccurlyeq}, \wedge_{\preccurlyeq}, \neg_{\preccurlyeq} \rangle$ -el jelölve

2./ a./ $\varphi \wedge \psi \in \varphi/_{\preccurlyeq^{\bullet}} \wedge_{\preccurlyeq} \psi/_{\preccurlyeq^{\bullet}}$

b./ $\neg \varphi \in \neg_{\preccurlyeq} \varphi/_{\preccurlyeq^{\bullet}}$

c./ $\exists_i \varphi \in \sup_{\preccurlyeq} \{ \varphi(v_i/v_n) : n \in \omega \}$

Bizonyitás:

A bizonyitást csak megszámlálható nyelv esetére végezzük el, az általánositás a szokásos módon történik.

A bizonyitás a következő két lemmán alapszik:

II3.2L

Lemma:

Ha teljesülnek a tétel feltételei, és

$\lesssim/_{\lesssim^\bullet}$-nak D szuprémumtartó ultraszűrője $\{\{\varphi(v_i/v_n)/_{\lesssim^\bullet} : n\in\omega\} : i\in\omega, \varphi\in F\}$-ben,

akkor

UD-t D'-vel jelölve

a./ $\varphi\wedge\psi \in D' \iff \varphi, \psi \in D'$

b./ $\neg\varphi \in D' \iff \varphi \notin D'$

c./ $\exists_i\varphi \in D' \iff (\exists y)\ \varphi(v_i/y) \in D'$

Bizonyitás:

$\varphi\wedge\psi \in D'$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{2a)}}}{\text{csakkor}}$ $\varphi/_{\lesssim^\bullet} \wedge_{\lesssim} \psi/_{\lesssim^\bullet} \in D$ $\underset{\substack{\uparrow \\ D \text{ szűrő}}}{\text{csakkor}}$ $\varphi, \psi \in D'$

$\neg\varphi \in D'$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{2b)}}}{\text{csakkor}}$ $\neg_{\lesssim}\ \varphi/_{\lesssim^\bullet} \in D$ $\underset{\substack{\uparrow \\ D \text{ ultraszűrő}}}{\text{csakkor}}$ $\varphi \notin D'$

$\exists_i\varphi \in D'$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{2c)}}}{\text{csakkor}}$ $\sup_{\lesssim}\{\varphi(v_i/v_n) : n\in\omega\} \in D$ $\underset{\substack{\uparrow \\ D \text{ szupr.tartó}}}{\text{csakkor}}$ $\{\varphi(v_i/v_n)/_{\lesssim^\bullet} : n\in\omega\} \cap D$ csakkor $(\exists n)\varphi(v_i/v_n) \in D'$

□

II3.3L

Lemma:

Minden, az előző lemma feltételeit teljesitő $\mathcal{D}$ ultraszürőhöz van olyan $\mathfrak{A}$, hogy

$$\varphi \in \mathrm{U}\mathcal{D} \Longleftrightarrow v \in k(\varphi)_{\mathfrak{A}}$$

Bizonyitás:

Jelöljük $\mathrm{U}\mathcal{D}$ -t $\mathcal{D}'$-vel.

$A \overset{d}{=} Rg\, v$, és minden $q \in I$-re

$$\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{t_q}} \rangle \in \mathfrak{A}_q \overset{d}{\Longleftrightarrow} q v_{i_1} \dots v_{i_{t_q}} \in \mathcal{D}'$$

Ezzel definiáltuk az $\mathfrak{A}$ strukturát, melyről most indukcióval bizonyitjuk, hogy a v-vel való kielégithetőség eldönti a $\mathcal{D}'$-be tartozást:

A./ primformulára az állitás $\mathfrak{A}$ definiciójából következik

B./ $\wedge$-re, $\neg$-re és $\exists_i$-re az állitás k definiciójából és 2L-ből következik:

$$v \in k(\varphi \wedge \psi)_{\mathfrak{A}} \text{ csakkor } v \in k(\varphi)_{\mathfrak{A}}, k(\psi)_{\mathfrak{A}} \text{ csakkor } \varphi, \psi \in \mathcal{D}' \text{ csakkor } \varphi \wedge \psi \in \mathcal{D}'$$

k def.-ja   ind. felt.   II3.2L

$$v \in k(\neg\varphi)_{\mathfrak{A}} \text{ csakkor } v \notin k(\varphi)_{\mathfrak{A}} \text{ csakkor } \varphi \notin \mathcal{D}' \text{ csakkor } \neg\varphi \in \mathcal{D}'$$

A def.ja

$$v \in k(\exists_i \varphi)_{\mathfrak{A}} \text{ csakkor } (\exists y)\, v \in k(\varphi(v_i/y))_{\mathfrak{A}} \text{ csakkor } (\exists y)\varphi(v_i/y) \in \mathcal{D}' \text{ csakkor } \exists_i \varphi \in \mathcal{D}'$$

□

Most a tétel bizonyitása:

$\varphi \not\leq \psi$ -ből következik, hogy (az $a \leq b \Leftrightarrow a \to b \in 1_{\leq}$ Boole-algebrai összefüggés szerint)

$\neg(\varphi \to \psi) \notin \underset{\leq}{\inf} F$, ezért (a Tarski-lemma alapján)

van a 2L lemma feltételeit teljesitő D ultraszürő, hogy

$\neg(\varphi \to \psi) \in D'$, ebből következik (3L szerint), hogy

$\neg(\varphi \to \psi) \notin \underset{\leq}{\inf} F$, és igy

$\varphi \not\leq \psi$

$\square$

III3.1TK

Következmény:

Ismert (ill. a függelékben bizonyitjuk), hogy az egyenlőséges logika felfogható az egyenlőségmentes logika egy elméleteként. Ezért, ha egy kalkulusról ellenőrizni akarjuk, hogy teljes-e az egyenlőséges logikában, elég azt ellenőrizni, hogy

a./ az egyenlőségmentes logikában teljes-e, és

b./ levezethető-e belőle az egyenlőség elméletének egy teljes axiómarendszere.

Ismert (ill. a függelékben bizonyitjuk), hogy a következő négy axiómaséma az egyenlőség elméletének (egyenlőségmentes predikátumkalkulusbeli) teljes axiómarendszerét definiálja:

1./ $$v_i = v_j \quad \leqq \quad v_j = v_i$$

2./ $$v_i = v_m \wedge v_m = v_j \quad \leqq \quad v_i = v_j$$

3./ $$v_i = v_i \quad \in \quad \sup_{\leqq} F$$

4./ ha az $\alpha v_i \beta$ szöveg egy primformula, akkor

$$v_i = v_j \quad \leqq \quad \alpha v_i \beta \leftrightarrow \alpha v_j \beta$$

Megjegyezzük, hogy 1 - 3 pontok azt mondják ki, hogy az egyenlőség ekvivalenciareláció, 4./ pedig azt, hogy univerzális kongruencia (lásd [Andr.72; 7.old]).

$\square$

II3.1M

Megjegyzés:

A tételben $\leqslant \subseteq \precsim$ -re adott elégséges feltétel néhány szinonimáját*/ felsoroljuk.

1./ $\precsim / \precsim^{\bullet}$ egy Boole-rendezés, és **/

$$\mathcal{F}/_{\precsim^{\bullet}} = \left\langle F_{\leqslant}, \wedge_{\leqslant}, \neg_{\leqslant}, \varphi/_{\precsim^{\bullet}} \left\langle \sup_{\leqslant} \{\varphi(v_i/v_n) : n \in \omega\} \right\rangle_{\varphi \in F} \right\rangle_{i \in \omega}$$

---

*/

E feltételek ellenőrzéséhez több dolgot kell megnézni, mint az eredeti feltételhez, nevezetesen azt is, hogy $\precsim^{\bullet}$ kongruencia-e. Kalkulusokra nézve ez azonban nem lényeges megszoritás, hiszen minden "józan" kalkulus kongruenciát definiál.

**/

A könyv definiciója szerint:

$$g(x)\langle f(x)\rangle_{x\in A} \stackrel{d}{=} \{ \langle g(x), f(x)\rangle : x \in A \}$$

2./

$$\mathcal{F}/_{\lesssim^\bullet} = \Big\langle F/_{\lesssim^\bullet},\ \Big\langle \langle \varphi/_{\lesssim^\bullet}, \psi/_{\lesssim^\bullet}\rangle \inf_{\lesssim}\{\varphi,\psi\}\Big\rangle_{\varphi,\psi\in F},$$

$$\Big\{\Big\langle \varphi/_{\lesssim^\bullet}, \psi/_{\lesssim^\bullet}\Big\rangle : \inf_{\lesssim}\{\varphi,\psi\} = \inf_{\lesssim} F,\ \sup_{\lesssim}\{\varphi,\psi\} = \sup_{\lesssim} F\Big\},$$

$$\Big\langle \varphi/_{\lesssim^\bullet} \Big\langle \sup_{\lesssim}\{\varphi(v_i/v_j) : j\in\omega\}\Big\rangle_{\varphi\in F}\Big\rangle_{i\in\omega}$$

és

$\mathrm{B}\ell\ \mathcal{F}/_{\lesssim^\bullet}$ Boole-algebra.

Egyenlőséges logika esetén ezeket a feltételeket három egyenlettel és egy definiáló relációval kell bőviteni.

3./ A III. fejezetben III2.1TK és III3.1TK a Gödel tétel további általánositására ad módot:

$$\equiv\ \subseteq\ \approx$$ minden olyan esetben fennáll, amikor

$Cr^{(R_t)}\, CA \subseteq \approx$ ill.

$Cr^{(t)}\, CA \subseteq \approx$

másszóval

$\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\approx}$ -ra teljesülnek a cilindrikus egyenletek és az R_t definiáló relációk. (Hasonlóan a másikra is.)

Az ítéletkalkuluson bemutatjuk, hogy a fenti jellegü összefüggések hogyan használhatók teljesség bizonyitására:

Legyen $\langle \mathcal{G}_V, k \rangle$ az ítéletkalkulus. Könnyen belátható, hogy ennek tautológikus formulaalgebrája pontosan a szabad Boole-algebra, azaz

$$\mathcal{G}_V/_{\overset{\circ}{k}} = \mathfrak{Fr}_V \, BA \quad ,$$

ahol BA a Boole-algebrák osztálya.

Tehát valamely kalkulus teljességéhez elég annyit bizonyitani, hogy az általa definiált ekvivalenciarelációval faktorizálva $\mathcal{G}_V$-t, Boole-algebrát kapunk.

$\square$

II3.2M

Megjegyzés:

A most bizonyitott tétel a következőképp is kimondható:

$\leqslant$ **az a legkisebb elő-Boole-rendezés a formulákon, melyre:**

$$\varphi \wedge \psi \in \inf_{\leqslant} \{\varphi, \psi\} = \varphi/_{\leqslant} \wedge_{\leqslant} \psi/_{\leqslant}$$

$$\neg\varphi \in \neg_{\leqslant} \varphi/_{\leqslant}$$

$$\exists_i \varphi \in \sup_{\leqslant} \{\varphi(v_i/v_j) : j \in \omega\}$$

illetve egyenlőségjeles logikánál, melyre még igaz, hogy

$$=_{ij} \geqslant =_{ji}$$

$$=_{ij} \geqslant =_{im} \wedge =_{mj}$$

$$=_{ii} \geqslant \varphi \quad \text{, minden } \varphi \in F_{P_t}\text{-re}$$

$$=_{ij} \leqslant \alpha v_i \beta \leftrightarrow \alpha v_j \beta \quad \text{, minden } \alpha v_i \beta \in P_t\text{-re}$$

□

II3.3M

Megjegyzés:

A következő értelemben állitjuk, hogy az előző tétel a teljességi tétel általánositott alakja:

Kalkulusnak axiómák és következtetési szabályok együttesét nevezve, egy kalkulus teljes, ha a hozzátartozó $\preccurlyeq$ előrendezésre*/ igaz, hogy $\leqq \subseteq \preccurlyeq$. (Azaz, minden azonosan igaz formulát be lehet bizonyitani.)

Az általunk adott feltételek $\preccurlyeq$-ra vonatkoznak, és olyanok, hogy általában rendkivül könnyü valamely kalkulusról ellenőrizni, hogy teljesiti-e őket.

Legyen a kalkulushoz tartozó előrendezés $\vdash$.

---

*/ $\varphi \preccurlyeq \psi$, ha a kalkulusban levezethető (szintaktikailag bizonyitható) a $\varphi \to \psi$ formula.

A kalkulus teljességéhez a következőket elég bizonyitani:

1./ $\varphi\wedge\psi \vdash \varphi$

$\varphi\wedge\psi \vdash \psi$

$\chi\vdash\varphi \;\&\; \chi\vdash\psi \implies \chi\vdash\varphi\wedge\psi$

2./ $\chi\vdash\varphi \;\&\; \chi\vdash\neg\varphi \implies \chi\vdash\psi$

$\varphi\vdash\chi \;\&\; \neg\varphi\vdash\chi \implies \psi\vdash\chi$

3./ $\varphi(v_i/v_n) \vdash \exists_i\varphi$

$(\forall n)\,\varphi(v_i/v_n)\vdash\chi \implies \exists_i\varphi\vdash\chi$

4./ Minden φ, ψ-hez van olyan η, melyre

$\varphi\vdash\eta$

$\psi\vdash\eta$

$\varphi\vdash\chi \;\&\; \psi\vdash\chi \implies \eta\vdash\chi$

5./ $((\chi\vdash\varphi \;\&\; \chi\vdash\eta \implies \chi\vdash\psi)\;\&$

$\&\;(\varphi\vdash\chi \;\&\; \eta\vdash\chi \implies \psi\vdash\chi)) \implies (\eta\vdash\neg\varphi \;\&\; \neg\varphi\vdash\eta)$

6./ $\varphi\wedge(\psi\vee\chi) \vdash (\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)$

$(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)\vdash \varphi\wedge(\psi\vee\chi)$

A megadott feltételek közül

1./ azt mondja ki, hogy . $\varphi\wedge\psi \in \inf_{\vdash} \{\varphi,\psi\}$

2./ azt mondja ki, hogy $\neg\varphi \in \neg_{\vdash} \varphi/_{\vdash}$.

3./ azt mondja ki, hogy $\exists_i\varphi \in \sup_{\vdash} \{\varphi(v_i/v_j) : j\in\omega\}$

4./ azt mondja ki, hogy $\vdash$ hálórendezés (1./ -el együtt)

5./ azt mondja ki, hogy $\vdash$ komplementált előrendezés

6./ azt mondja ki, hogy $\vdash$ disztributiv előrendezés

A most megadott feltételrendszer csak egy kiragadott példa arra, hogy a tétel alapján hogyan ellenőrizhetjük egy kalkulus teljességét. Az, hogy egy kalkulus teljességét ilyen könnyü ellenőrizni, eszközül szolgálhat uj esetleg speciális célokat szolgáló kalkulusok szerkesztéséhez. (Ez pl. tételbizonyitó programoknál hasznos .)

Kalkulusok teljességére a következő értelemben szükséges is a feltétel:

Nevezzünk egy kalkulust józannak, ha a hozzátartozó $\lessapprox$ előrendezésre $\lessapprox^{\bullet}$ kongruencia.

[Andr.72; T41Kb. (és T3oKb., T29K)] tétele értelmében ekkor minden józan kalkulusra igaz, hogy ha $\leqslant \subseteq \lessapprox$, akkor a $\lessapprox$ reláció teljesiti a feltételt.

□

II.4.
Reprezentációtétel

TARTALOM

$$\mathfrak{S} \stackrel{d}{=} \mathbb{H}\{ \mathfrak{F}_{\mathfrak{R}_t/\equiv} : t \text{ tipus} \}$$

II4.1T: $\mathfrak{S} = \mathsf{Lf}$

A bizonyitás során felhasznált definiciók és lemmák:

Minden $\mathcal{L} \in \mathsf{Lf}$ -hez $t \stackrel{d}{=} \langle |\Delta x|+1 \rangle_{x \in C}$ és

$\kappa \in \mathsf{Ho}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{R}_t}, \mathcal{L})$; $\kappa(x v_{i_0} \ldots v_{i_{|\Delta x|}}) \stackrel{d}{=} s_{[y_1/i_1, \ldots, y_{|\Delta x|}/i_{|\Delta x|}]} x$

$V(\varphi)$ a φ-ben előforduló változók indexeinek halmaza

II4.1L: $\Delta \kappa(\varphi) \subseteq V(\varphi)$

II4.2L: $\kappa(\varphi(v_i/v_j)) = s^i_j \, \kappa(\varphi)$

II.4. Reprezentáció tétel

Reprezentáció tételnek nevezzük azt a tételt, mely két algebraosztály, $\mathfrak{G}$ és Lf azonosságát mondja ki. Azért nevezzük reprezentációtételnek, mert kimondja, hogy minden lokálisan véges cilindrikus algebra reprezentálható formulaalgebraként. (A könyv második része ezt a tételt bizonyitani fogja.) A későbbiekben ezt a tételt mindig olyankor használjuk, amikor valamit már bebizonyitottunk $\mathcal{L}\omega$-re és a bizonyitást tovább akarjuk vinni CA -ra is. A tétel bizonyitásához a teljességi tételt fogjuk használni.

Jelölje $\mathfrak{G}$ az elsőrendü formulaalgebrák osztályát, azaz

$$\mathfrak{G} \stackrel{d}{=} \mathbf{H}\left\{ \mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv} \ : \ t \text{ tipus} \right\} \ .$$

II4.1T

Tétel:

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \mathrm{Lf}$$

Bizonyitás:

1./ $\tilde{\mathfrak{S}} \subseteq \mathrm{Lf}$, triviális.

2./ $\mathrm{Lf} \subseteq \tilde{\mathfrak{S}}$

Legyen $\mathcal{L} \in \mathrm{Lf}$.

Definiálunk hozzá egy t tipust és egy $\mathcal{K}$ függvényt, ugy hogy

$$\mathcal{K}^* \mathfrak{F}_{P_t} = \mathcal{L}$$ legyen.

Azután majd be fogjuk látni, hogy $\mathcal{K}^\circ \supseteq \equiv$, és igy

$$\mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv} \succcurlyeq \mathcal{L}$$

azaz

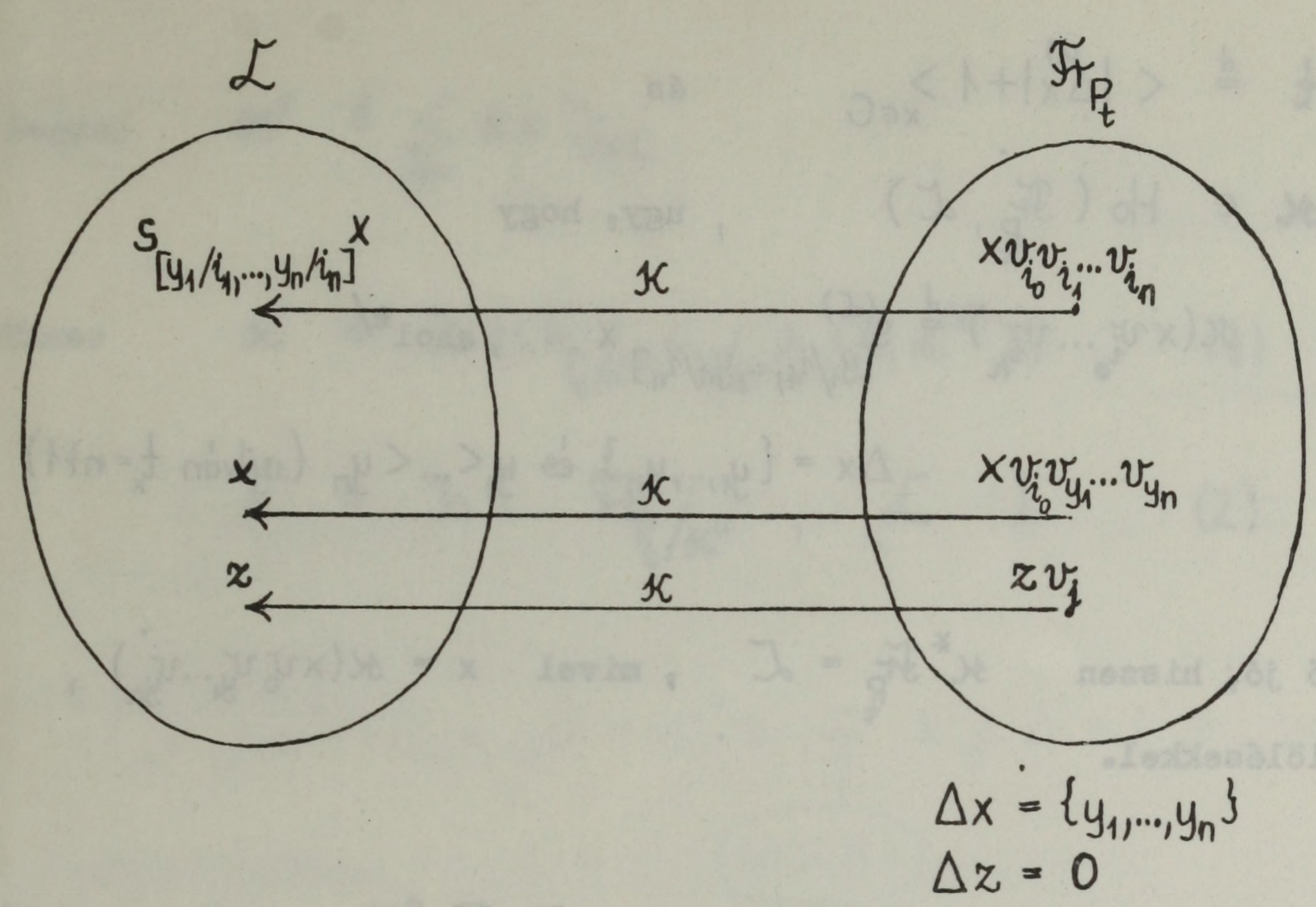
$$\mathcal{L} \in \tilde{\mathfrak{S}}$$

$$(\forall \mathcal{L} \in Lf)\,(\exists t)\,(\exists \varkappa \in Ho(\mathfrak{F}_{P_t}, \mathcal{L}))\ \varkappa^{\circ} \supseteq \equiv_{M_t}$$

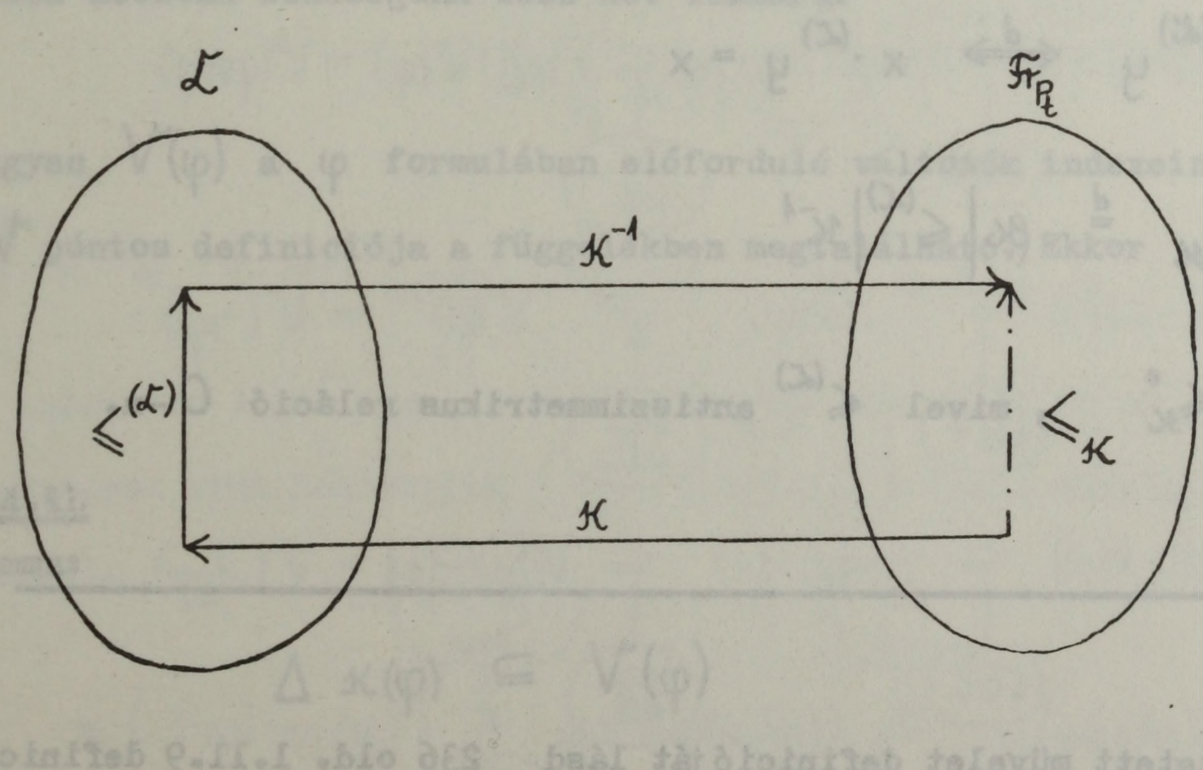
$$\Big\Downarrow$$

$$Lf \subseteq \mathfrak{S}$$

Ábra a II4.1T tételhez



Ábra a $\mathcal{K}$ függvény definiciójához.



Ábra a $\leq_{\mathcal{K}}$ előrendezés definiciójához.

Legyen $\quad t \overset{d}{=} \langle |\overset{(\mathcal{L})}{\Delta} x|+1 \rangle_{x\in C} \quad$ és

$\mathcal{K} \in Ho(\mathfrak{F}_{P_t}, \mathcal{L})$, ugy, hogy

$\mathcal{K}(x v_{i_0} \dots v_{i_n}) \overset{d}{=} S^{(\mathcal{L})}_{[y_1/i_1,\dots,y_n/i_n]} x$, ahol*/

$\Delta x = \{y_1,\dots,y_n\}$ és $y_1<\dots<y_n$ (nyilván $t_x = n+1$)

A definició jó, hiszen $\mathcal{K}^* \mathfrak{F}_{P_t} = \mathcal{L}$, mivel $x = \mathcal{K}(x v_0 v_{y_1} \dots v_{y_n})$,
a fenti jelölésekkel.

Mivel $\mathcal{L} \in CA$, és igy Boole-algebra is, értelmezhető rajta
egy $\leqslant^{(\mathcal{L})}$ rendezés, nevezetesen

$$x \leqslant^{(\mathcal{L})} y \overset{d}{\Longleftrightarrow} x \cdot^{(\mathcal{L})} y = x$$

Legyen $\quad \leqslant_{\mathcal{K}} \overset{d}{=} \mathcal{K} | \leqslant^{(\mathcal{L})} | \mathcal{K}^{-1}$

Most $\quad \mathcal{K}^{\circ} = \leqslant_{\mathcal{K}}^{\bullet}$, mivel $\leqslant^{(\mathcal{L})}$ antiszimmetrikus reláció C-n.

---

*/

Az $S^{(\mathfrak{A})}_{\mathcal{J}}$ levezetett müvelet definicióját lásd 236 old. 1.11.9 definició.

Legyen $\quad \mathcal{K}' \overset{d}{=} \underset{x/\mathcal{K}^0}{\langle} \mathcal{K}x \rangle_{x \in C}$

Ekkor $\quad \mathcal{K}' \in \mathrm{Is}\left(\langle Ft_{P_t}/\mathcal{K}^0, \leq_{\mathcal{K}/\mathcal{K}^0}\rangle, \langle C, \leq^{(\mathcal{L})}\rangle\right) \quad (1)$ és

$$\mathcal{K}' \in \mathrm{Is}\left(\mathcal{F}t_{P_t}/\mathcal{K}^0 , \mathcal{L} \right) \quad (2)$$

Most azt, hogy $\mathcal{K}^0 \supseteq \equiv$, ugy fogjuk belátni, hogy az általánositott Gödel tételt alkalmazzuk $\leq_{\mathcal{K}}$ -ra.

Ehhez azonban szükségünk lesz két lemmára.

Legyen $V(\varphi)$ a φ formulában előforduló változók indexeinek halmaza. (V pontos definiciója a függelékben megtalálható.) Ekkor

II4.1L

Lemma:

$$\Delta\, \mathcal{K}(\varphi) \subseteq V(\varphi)$$

azaz

$$i \notin V(\varphi) \Longrightarrow c_i\, \mathcal{K}(\varphi) = \mathcal{K}(\varphi)$$

Bizonyitás:

indukcióval történik.

A./ primformulákra:

Legyen $\Delta x = \{y_1,\dots,y_n\}$, $y_1 < \dots < y_n$ és $\sigma \stackrel{d}{=} [y_1/m_1,\dots,y_n/m_n]$

Ekkor

$$\Delta\mathcal{K}(x v_{m_0} \dots v_{m_n}) = \Delta S_\sigma x \underset{1.11.12.(x)}{\subseteq} \sigma^{*}\Delta x = \{m_1,\dots,m_n\} \subseteq V(x v_{m_0} \dots v_{m_n})$$

B./ az $\wedge$, $\neg$, $\exists_i$, $=_{ij}$ müveletekre:

$$\Delta\mathcal{K}(\varphi\wedge\psi) = \Delta(\mathcal{K}(\varphi)\cdot\mathcal{K}(\psi)) \underset{1.6.6.}{\subseteq} \Delta\mathcal{K}(\varphi) \cup \Delta\mathcal{K}(\psi) \underset{\text{ind. felt.}}{\subseteq} V(\varphi) \cup V(\psi) = V(\varphi\wedge\psi)$$

$$\Delta\mathcal{K}(\neg\varphi) = \Delta(-\mathcal{K}(\varphi)) \underset{1.6.7.}{\subseteq} \Delta\mathcal{K}(\varphi) \underset{\text{ind. felt.}}{\subseteq} V(\varphi) = V(\neg\varphi)$$

$$\Delta\mathcal{K}(\exists_i\varphi) = \Delta(c_i\,\mathcal{K}(\varphi)) \underset{1.6.8.}{\subseteq} \Delta\mathcal{K}(\varphi) \setminus \{i\} \underset{\text{ind. felt.}}{\subseteq} V(\varphi) \setminus \{i\} = V(\exists_i\varphi)$$

$$\Delta\mathcal{K}(=_{ij}) = \Delta(d_{ij}) \underset{1.6.4.}{\subseteq} \{i,j\} = V(=_{ij})$$

□

II4.2L

Lemma:

$$\mathcal{K}\left(\varphi(v_i/v_j)\right) = s_j^i\ \mathcal{K}(\varphi)$$

Bizonyitás:

indukcióval történik.

A./ primformulákra:

Legyen $\Delta x = \{y_1,\dots,y_n\}$ és $y_1<\dots<y_n$.

$$\mathcal{K}\left(x v_{m_0}\dots v_{m_n}(v_i/v_j)\right) = S_{[i/j]\cdot[y_1/m_1,\dots,y_n/m_n]}\,x \overset{1.11.11.(i),(iv)}{=} s_j^i\ S_{[y_1/m_1,\dots,y_n/m_n]}\,x =$$

$$= s_j^i\ \mathcal{K}\left(x v_{m_0}\dots v_{m_n}\right)$$

B./ $\wedge$-re, $\neg$-re, $\exists_m$-re, $=_{kn}$-re, ha $m \neq i,j$ és $i \neq k,n$:

Az indukciós lépés igaz, mivel a (v_i/v_j) operáció, és a $\mathcal{K}$, s_j^i függvények mind homomorfak (s_j^i-re 1.5.3.) a fenti müveletekre.

Például:

$$\mathcal{K}\left((\neg\varphi)(v_i/v_j)\right) \overset{(v_i/v_j)\ \text{hom.}}{=} \mathcal{K}\left(\neg(\varphi(v_i/v_j))\right) \overset{\mathcal{K}\ \text{hom.}}{=} -\mathcal{K}\left(\varphi(v_i/v_j)\right) \overset{\text{ind. felt.}}{=}$$

$$= -s_j^i\,\mathcal{K}(\varphi) \overset{s_j^i\ \text{hom.}}{=} s_j^i - \mathcal{K}(\varphi) \overset{\mathcal{K}\ \text{hom.}}{=} s_j^i\ \mathcal{K}(\neg\varphi)$$

C./ a kimaradó esetekre :

$$\mathcal{K}((\exists_i\varphi)(v_i/v_j)) = \mathcal{K}(\exists_i\varphi) \underset{1.5.8.(i)}{=} \mathcal{K}(s^i_j\,\exists_i\varphi) = s^i_j\,\mathcal{K}(\exists_i\varphi)$$

Legyen z felső korlátja a φ-ben szereplő változók indexeiből és i,j-ből álló számhalmaznak.

$$\mathcal{K}((\exists_j\varphi)(v_i/v_j)) = \mathcal{K}((\exists_z\varphi(v_j/v_z))(v_i/v_j)) \underset{\text{ind. felt.; B.)}}{=} s^i_j\,\mathcal{K}(\exists_z\varphi(v_j/v_z)) = s^i_j c_z\,\mathcal{K}(\varphi(v_j/v_z)) \underset{\text{ind. felt.}}{=}$$

$$= s^i_j c_z s^j_z\,\mathcal{K}(\varphi) \underset{1.5.9.(i)}{=} s^i_j c_j s^z_j\,\mathcal{K}(\varphi) \underset{\substack{z\notin V(\varphi)\\ \text{II4. 1L}}}{=} s^i_j c_j s^z_j c_z\,\mathcal{K}(\varphi) \underset{1.5.8.(i)}{=}$$

$$= s^i_j c_j c_z\,\mathcal{K}(\varphi) \underset{\substack{z\notin V(\varphi)\\ \text{II4. 1L}}}{=} s^i_j c_j\,\mathcal{K}(\varphi) = s^i_j\,\mathcal{K}(\exists_j\varphi)$$

$k \neq i$

$$\mathcal{K}(=_{ik}(v_i/v_j)) = \mathcal{K}(=_{jk}) = d_{jk} \underset{1.5.4.(i)}{=} s^i_j d_{ik} = s^i_j\,\mathcal{K}(=_{ik})$$

$$\mathcal{K}(=_{ii}(v_i/v_j)) = \mathcal{K}(=_{jj}) = d_{jj} \underset{1.5.4.(ii)}{=} s^i_j d_{jj} \underset{(C5)}{=} s^i_j d_{ii} = s^i_j\,\mathcal{K}(=_{ii})$$

□

Most nézzük, hogy teljesülnek-e a Gödel tétel feltételei:

Fel fogjuk használni a Gödel tétel kimondásakor bevezetett jelöléseket, pl. $\wedge_{\leqslant}$.

1./ Mivel $\langle C_1 \leqslant^{(\mathcal{L})} \rangle$ Boole-rendezés, (1) -ből következik, hogy

$\langle \mathcal{F}_{P_t}/_{\leqq_\mathcal{K}^\bullet}, \leqq_\mathcal{K}/_{\leqq_\mathcal{K}^\bullet} \rangle$ is Boole-rendezés.

2./ Mivel $\wedge_{\leqslant^{(\mathcal{L})}} = \cdot^{(\mathcal{L})}$ és $\neg_{\leqslant^{(\mathcal{L})}} = -^{(\mathcal{L})}$, (1) és (2) -ből következik, hogy

$\wedge_{\leqq_\mathcal{K}} = \cdot^{(\mathcal{F}_{P_t}/\leqq_\mathcal{K}^\bullet)}$ és $\neg_{\leqq_\mathcal{K}} = -^{(\mathcal{F}_{P_t}/\leqq_\mathcal{K}^\bullet)}$,

és mivel $C_i^{(\mathcal{L})}x = \sup_{\leqslant^{(\mathcal{L})}} \{ s_j^{i\,(\mathcal{L})} x : j \in \omega \}$, (hiszen $\mathcal{L} \in Lf$ és 1.11.6.)

(1), (2) és ||4.2L -ből következik, hogy

$C_i^{(\mathcal{F}_{P_t}/\leqq_\mathcal{K}^\bullet)} \varphi = \sup_{\leqq_\mathcal{K}} \{ \varphi(v_i/v_j) : j \in \omega \}$.

3./ Mivel $d_{ij} \leq^{(\mathfrak{L})} d_{ji}$ (1.3.1.)

$$d_{ij} \cdot d_{jm} \mathrel{\dot{\leq}}^{(\mathfrak{L})} d_{im}$$ ((C6),(C2) ill. (C5),(C0)) és

$$d_{ii} \in \sup_{\leq^{(\mathfrak{L})}} C$$ ((C5))

igaz, hogy $=_{ij} \leq_{\mathcal{K}} =_{ji}$

$$=_{ij} \wedge =_{jm} \leq_{\mathcal{K}} =_{im}$$

$$=_{ii} \in \sup_{\leq_{\mathcal{K}}} \dot{F}_{P_t}$$

4./ Legyen az $\alpha v_i \beta$ primformula $x v_{m_0} \ldots v_{m_{k-1}} v_i v_{m_{k+1}} \ldots v_{m_n}$ alaku, ahol

$\Delta x = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $y_1 < \ldots < y_n$, és legyen továbbá

$$\sigma \overset{d}{=} [y_1/m_1, \ldots, y_{k-1}/m_{k-1}, y_{k+1}/m_{k+1}, \ldots, y_n/m_n]$$

Ekkor 1.11.11. (i), (iv) miatt

$$\mathcal{K}(\alpha v_i \beta) = s_i^{\pi} \, s_{\sigma} \, s_{\pi}^{y_k} x \quad \text{és}$$

$$\mathcal{K}(\alpha v_j \beta) = s_j^{\pi} \, s_{\sigma} \, s_{\pi}^{y_k} x \quad ,$$

ahol $\pi \in \omega \setminus (m^*(n+1) \cup \{i\} \cup \Delta x)$

$S_{\sigma}\tilde{j}^{y_k}_{\pi}X$-et a -val jelölve, azt kell belátnunk, hogy

$$d_{ij} \leqslant^{(\mathcal{L})} (s_i^{\pi} a \cdot s_j^{\pi} a) + (-s_i^{\pi} a \cdot -s_j^{\pi} a)$$

Ez igaz, mert

$$\begin{aligned}
& d_{ij} \cdot ((s_i^{\pi} a \cdot s_j^{\pi} a) + (-s_i^{\pi} a \cdot -s_j^{\pi} a)) = \\
& = d_{ij} \cdot s_i^{\pi} a \cdot s_j^{\pi} a + d_{ij} \cdot -s_i^{\pi} a \cdot -s_j^{\pi} a \overset{1.5.3.\,(ii)}{=} \\
& = d_{ij} \cdot s_i^{\pi} a \cdot s_j^{\pi} a + d_{ij} \cdot s_i^{\pi} -a \cdot s_j^{\pi} -a = \\
& = (d_{ij} \cdot s_i^{\pi} a) \cdot (d_{ij} \cdot s_j^{\pi} a) + (d_{ij} \cdot s_i^{\pi} -a) \cdot (d_{ij} \cdot s_j^{\pi} -a) \overset{1.5.6.}{=} \\
& = d_{ij} \cdot s_i^{\pi} a + d_{ij} \cdot s_i^{\pi} -a \overset{1.5.3.\,(i)}{=} \\
& = d_{ij} \cdot s_i^{\pi} (a + -a) = d_{ij} \cdot 1 = d_{ij}
\end{aligned}$$

Tehát $\leqslant \ \subseteq \ \leqslant_{\mathcal{K}}$, és igy

$\equiv \ \subseteq \ \mathcal{K}^{\circ}$ és ezzel bebizonyitottuk, hogy

$$\mathcal{L} \in \mathfrak{S}$$

$\square$

II.5.

A formulaalgebrák és halmazalgebrák kapcsolata

TARTALOM

II5.1T: $\mathbf{SP}\,\mathfrak{S} = \mathbf{SP}\,\mathfrak{Lo}$

II5.1M: A tétel a formulaalgebrák, ill. lokálisan f.véges cil.halmazalgebrák egy-egy reprezentációtételének is felfogható.

II4.1T,II5.1TK: $\mathbf{SP}\,\mathfrak{Lo} = \mathbf{SP}\,\mathfrak{Lf}$

II.5. A formulaalgebrák és halmazalgebrák kapcsolata.

Az előző fejezet eredményei alapján ahhoz, hogy $\mathcal{L}\mathcal{V}$ és Lf (ill. CA) között kapcsolatot létesitsünk, elég $\mathfrak{S}$ és $\mathcal{L}\mathcal{V}$ kapcsolatát vizsgálni. E fejezet eredménye, hogy $\mathbf{SP}\,\mathcal{L}\mathcal{V} = \mathbf{SP}\,\mathrm{Lf}$, melynek alapján a későbbiek során az $\mathcal{L}\mathcal{V}$-re kapott eredményeket általánositani tudjuk CA-ra.

Legyen ${}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{R}$ az $\mathfrak{A}$ struktura által meghatározott része $\mathcal{L}_A$ -nak, azaz

$$ {}_{\mathfrak{A}}\tilde{\mathfrak{R}} \overset{d}{=} \varepsilon^*_{\mathfrak{A}}\ \tilde{\mathfrak{R}} $$

II5.1T

Tétel:

$$ \mathbf{SP}\,\mathfrak{S} = \mathbf{SP}\,\mathcal{L}\mathcal{V} $$

Bizonyitás:

1./ $\mathfrak{G} \subseteq \mathbb{S}\mathbb{P}\, \mathcal{L}v$

${}_{\mathfrak{A}}\tilde{\mathfrak{L}}$ lokálisan függetlenül véges, hiszen az $(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k)^{*}\, P_t$ generátorrendszere lokálisan f. véges, k definiciója miatt, és könnyen látható, hogy lokálisan f. véges generátorrendszer lokálisan f. véges algebrát generál. Igy minden $N \subseteq M_t$-re $\tilde{\mathfrak{L}}^{N} \in \mathbb{S}\mathbb{P}\, \mathcal{L}v$, hiszen $\tilde{\mathfrak{L}}^{N} \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{A} \in N}\, {}_{\mathfrak{A}}\tilde{\mathfrak{L}}$

Most, mivel tudjuk, hogy $\mathcal{B} \in \mathfrak{G} \iff (\exists N \subseteq M_t)\, \mathcal{B} \cong \tilde{\mathfrak{L}}^{N}$ (lásd pl. [Andr.72; T41K]), adódik, hogy

$$\mathfrak{G} \subseteq \mathbb{I}\mathbb{S}\mathbb{P}\, \mathcal{L}v = \mathbb{S}\mathbb{P}\, \mathcal{L}v$$

2./ $\mathcal{L}v \subseteq \mathbb{S}\,\mathfrak{G} \subseteq \mathbb{S}\mathbb{P}\,\mathfrak{G}$ */

Legyen $\mathcal{B} \in \mathcal{L}v$.

Szerkesztünk hozzá egy $\mathfrak{A}$ (valamilyen t-tipusu) strukturát, ugy hogy $\mathcal{B} \cong {}_{\mathfrak{A}}\tilde{\mathfrak{L}} = \varepsilon_{\mathfrak{A}}^{*}\, \mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv} \in \mathfrak{G}$.

---

*/ Utólag észrevettük, hogy 2./ bizonyitása felesleges, hiszen 114.1T szerint $\mathfrak{G} = \mathrm{Lf} \supseteq \mathcal{L}v$.

Mivel $\mathcal{B}$ lokálisan f. véges halmazalgebra, van olyan A halmaz, hogy

$$B \subseteq Sb\,{}^{\omega}A \quad \text{és}$$

$$(\forall b\in B)(\overset{d}{\exists} t_b \in \omega \setminus 1)(\overset{d}{\exists} \mathfrak{A}_b \subseteq {}^{t_b}A)\; b = \{ s \in {}^{\omega}A :\; t_b 1 s \in \mathfrak{A}_b \}.$$

Rögzitettünk tehát egy $t \in {}^{B}\omega$ tipusu $\mathfrak{A}$ strukturát.

$$\mathcal{B} \cong_{\mathfrak{A}} \tilde{\Omega}$$, mert

$$B \subseteq_{\mathfrak{A}} K$$, mivel $(\forall b\in B)\, k(b v_0 \dots v_{t_b - 1})_{\mathfrak{A}} = b$, és így

$$\mathcal{B} \subseteq_{\mathfrak{A}} \tilde{\Omega}$$, mivel mindketten részalgebrái $\mathcal{L}_A$ -nak.

Most, tekintve, hogy $\mathbb{SP}$ lezárási operátor, 1./-ből és 2./-ből adódik, hogy

$$\mathbb{SP}\, \mathfrak{S} = \mathbb{SP}\, \mathcal{L}$$

□

II5.1M

Megjegyzés:

A tételből következik, hogy $\mathcal{L}r$ és $\mathfrak{G}$ kvázivarietása megegyezik. (Ez onnan látható, hogy a kvázivarietásképzés az $\mathbf{SP}$ -nél erősebb lezárási operátor.) Eszerint nyilván varietásuk is megegyezik, azaz $\mathfrak{G}$ -ben pontosan azok az egyenletek érvényesek, mint $\mathcal{L}r$ -ben.

A bizonyitás során láttuk, hogy

a./ $\mathfrak{G} \subseteq \mathbf{SP}\,\mathcal{L}r$

Ez a formulaalgebrák egy reprezentációtételének is tekinthető, mely lehetővé teszi, hogy az előbbiek vizsgálatánál geometriai intuicióra is támaszkodjunk.

b./ $\mathcal{L}r \subseteq \mathfrak{G}$

Ez egy forditott irányu reprezentáció-tételnek fogható fel.

□

II4.1T,II5.1TK

Következmény:

$$\mathbf{SP}\,Lf = \mathbf{SP}\,\mathcal{L}r$$

Bizonyitás:

$$\mathbf{SP}\,Lf \underset{114.1T}{=} \mathbf{SP}\,\mathfrak{G} \underset{115.1T}{=} \mathbf{SP}\,\mathcal{L}r$$

□

III.

Az elsőrendü predikátumkalkulus algebrai vizsgálata.

TARTALOM

A fejezetben

$$I \stackrel{d}{=} Do\, t \quad ; \quad n \stackrel{d}{=} t_q - 1 \quad .$$

Ez a fejezet a tanulmány központi része, melyben az elsőrendü predikátumkalkulus algebrai tulajdonságait vizsgáljuk. A

III.1. fejezetben olyan algebrai definiciókat és tételeket közlünk, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz. Mivel az itt közölt tételekre nem tudtunk irodalmi hivatkozást adni, bizonyitásukat a függelékben közöljük. A

III.2. fejezet a szokásos elsőrendü predikátumkalkulus, $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ algebrai vizsgálatát tartalmazza, melynek eredményeként a

III.3. fejezetben konstruálunk egy az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ -val ekvivalens, de algebrai szempontból természetesebb felépitésü logikát. Befejezésül, a

III.4. fejezetben bizonyitjuk a III.2. és III.3. fejezetben használt bizonyos eszközök elkerülhetetlenségét.

A rövidebb irásmód érdekében a III. fejezetben végig érvényesek a következő konvenciók:

Az I jel $Do\,t$ -t rövidit, az n jel pedig a $t_q - 1$ szöveget.

Tehát

$$I \overset{d}{=} Do\,t \quad , \quad n \overset{d}{=} t_q - 1 \quad .$$

III.1.

Algebrai definiciók és tételek

TARTALOM

A definiálórelációkat (S) egyenleteknek is, és relációnak is tekintjük.

$$\mathfrak{A}_{\hat{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_{Dg}, \mathfrak{A}) \; ; \quad Dg \upharpoonright \mathfrak{A}_{\hat{g}} \overset{d}{=} g$$

$$\mathfrak{A} \models_{g} S \overset{d}{\Longleftrightarrow} S \subseteq \mathfrak{A}_{\hat{g}}^{\circ}$$

$\mathfrak{F}_I^{(S)} K$, $\mathfrak{C}_I^{(S)} K$ definiciója

Jelölés: $\dots^{(S)} K \overset{d}{=} \dots_I^{(S)} K$, ahol $I \overset{d}{=} \bigcap\{J : S \subseteq {}^2\mathfrak{F}_J\}$

$\dots_I K \overset{d}{=} \dots_I^{(0)} K$

III.1.1T: a) $\mathfrak{F}_I^{(S)} K = \mathfrak{F}_I^{(S)} \mathbf{SP} K$

b) $\mathfrak{C}_I^{(S)} K = \mathfrak{C}_I^{(S)} \mathbf{SP} K$

$$\Gamma_I^{(S)} K \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A}_{\hat{g}} : \mathfrak{A} \models_g S, \; g \in {}^I A, \; \mathfrak{A} \in K \}$$

$$P_I^{(S)} K \overset{d}{=} \langle \langle g_x \rangle_{g \in \Gamma_I^{(S)} K} \rangle_{x \in \mathfrak{F}_I}$$

III.1.2T: $P_I^{(S)} K^{\circ} = \mathfrak{C}_I^{(S)} K$

III.1. Algebrai definiciók és tételek (bizonyitásuk a függelékben).

Ebben a fejezetben a definiáló relációk, a definiáló relációk alatt szabad algebrák, és algebrahalmazok definiáló relációk alatt szabad szorzatai központi szerepet kapnak. (Lásd 147 old.)

Ha adva van egy tetszőleges I halmaz, az I -vel felirható <u>definiáló-relációk</u> tulajdonképpen az ℓ-beli müveletjelekkel felirható egyenletek az I elemeit használva változójelekként. Másszóval, egy S definiálóreláció-halmazra igaz, hogy

$$S \subseteq \{=\} \times {}^2Ft_I$$

A továbbiakban (a könyv 147 oldalának megfelelően), ha az S egyenletrendszert mint definiálóreláció-halmazt tekintjük, akkor azonositjuk az ${}^2Ft_I$ neki megfelelő részhalmazával, azaz a megfelelő relációval ${}^2Ft_I$ -n. Tehát

$$S \subseteq {}^2Ft_I \quad .$$

Legyen $R_g\, g \subseteq A$, és $\mathfrak{A}$ egy l-tipusu algebra. Ekkor g homomorf kiterjesztését, ${}^{\mathfrak{A}}\hat{g}$-t a következőképpen definiáljuk:

$${}^{\mathfrak{A}}\hat{g} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_{\mathrm{Do}\,g}, \mathfrak{A})$$ olyan, hogy

$$\mathrm{Do}\, g \restriction {}^{\mathfrak{A}}\hat{g} \overset{d}{=} g \quad .$$

Ha adva van egy $\mathfrak{A}$ algebra és egy $g \in {}^{I}A$ kiértékelő függvény, akkor a szokásos értelemben mondjuk azt, hogy az S definiáló relációkat g kielégiti $\mathfrak{A}$-ban (S elemeit egyenleteknek, tehát formuláknak tekintve):

$$\mathfrak{A} \models_{g} S \overset{d}{\Longleftrightarrow} S \subseteq {}^{\mathfrak{A}}\hat{g}^{\,0}$$

A továbbiakban K egy tetszőleges l-tipusu algebraosztály.
$\mathfrak{F}_I K$ és $\mathrm{Cr}_I K$ definiciójával (lásd I.2.) analóg módon definiáljuk $\mathfrak{F}_I^{(S)} K$-t és $\mathrm{Cr}_I^{(S)} K$-t.

Az " I -vel generált K-szabad algebra S alatt" $\mathfrak{F}_I^{(S)} K$ és a szóalgebra neki megfelelő kongruenciája $\mathrm{Cr}_I^{(S)} K$ definiciója annyiban tér el a könyv 147 oldalán adott definiciótól, hogy nem kötjük ki, hogy I rendszám legyen és kikötjük, hogy a tipus l.
Eszerint $\mathrm{Cr}_I^{(S)} K$ az $\mathfrak{F}_I$ algebra azon kongruenciáinak metszete, melyek tartalmazzák S-et és melyekkel vett faktoralgebra izomorf $\mathbf{S}K$ valamelyik elemével.

Jelölés:

Minden $\dots{}^{(S)}_{I}K$ alaku jelölésben (ahol ... helyett állhat $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}$ vagy olyan jel, amit később vezetünk be) elhagyjuk az I indexet, ha az S-ből helyreállitható, azaz

$$\dots{}^{(S)}K \overset{d}{=} \dots{}^{(S)}_{I}K \qquad \text{ahol}$$

I az a legkisebb halmaz, melyre $S \subseteq {}^{2}\mathfrak{F}_{I}$

Továbbá, $S = 0$ esetén a felső (S) index is elhagyható, tehát

$$\dots{}_{I}K \overset{d}{=} \dots{}^{(0)}_{I}K$$

Ez a jelölés nem vezet ellentmondásra, mert a már korábban definiált $\mathfrak{F}_{I}K$, $\mathfrak{C}_{I}K$ fogalmakra fennáll, hogy

$$\mathfrak{F}_{I}K = \mathfrak{F}^{(0)}_{I}K \quad \text{és} \quad \mathfrak{C}_{I}K = \mathfrak{C}^{(0)}_{I}K$$

III1.1T

Tétel:

$$\text{a./} \quad \mathfrak{F}_I^{(S)} K = \mathfrak{F}_I^{(S)} \mathbb{S}\mathbb{P} K$$

$$\text{b./} \quad C_I^{(S)} K = C_I^{(S)} \mathbb{S}\mathbb{P} K$$

$\square$

Most algebrák helyett vizsgáljunk algebra-kiértékelés párokat. Például ahelyett, hogy érvényes-e az E egyenlet $\mathfrak{A}$-ban, $\mathfrak{A} \models E$, azt kérdezzük, hogy igaz-e az E egyenlet $\mathfrak{A}$-ban a g kiértékelés mellett, $\mathfrak{A} \models_g E$.

A következőkben a $\langle g, \mathfrak{A} \rangle$ <u>pár számunkra egyenértékü lesz a</u> ${}^{\mathfrak{A}}\hat{g}$ <u>homomorfizmussal</u> a következő okokból:

Mivel az algebra-kiértékelés párokat csak egyenletekkel vizsgáljuk, a ${}^{\mathfrak{A}}\hat{g}$ homomorfizmus meghatározza $\mathfrak{A}$-nak számunkra érdekes részét, azaz a $\langle g, \mathfrak{A} \rangle$ pár és a $\langle g, {}^{\mathfrak{A}}\hat{g}^* \mathfrak{F}_I \rangle$ pár számunkra ekvivalens. Mivel az utóbbi és ${}^{\mathfrak{A}}\hat{g}$ egymást kölcsönösen meghatározzák, a $\langle g, \mathfrak{A} \rangle$ párok helyett vizsgálhatjuk a ${}^{\mathfrak{A}}\hat{g}$ homomorfizmusokat.

Ezt kihasználva a következőkben $\langle g, \mathfrak{A} \rangle$ párok valamely osztályát és a megfelelő homomorfizmusok osztályát felváltva használjuk kényelmi szempontokat követve.

Kizárólag olyan homomorfizmusosztályokat (azaz algebra-kiértékelés párokból álló osztályokat) fogunk vizsgálni, melyek megadhatók egy algebraosztá és egy definiálórelációhalmaz segitségével.

A K algebraosztályhoz és S definiálóreláció-halmazhoz tartozó homomorfizmusosztály:

$$\Gamma_I^{(S)} K \stackrel{d}{=} \{ \mathfrak{A}_{\hat{g}} : \mathfrak{A} \models_g S ,\ g \in {}^I A ,\ \mathfrak{A} \in K \}$$

Ugyanugy, ahogy algebraosztályokhoz megszerkesztettük szabadalgebrájukat, (mely bizonyos értelemben közös lényegüket tükrözte) most a homomorfizmusosztályokhoz szerkesztjük meg szabad szorzatukat:

$\Gamma_I^{(S)} K$ szabadszorzata:

$$p_I^{(S)} K \stackrel{d}{=} \langle \langle g_x \rangle_{g \in \Gamma_I^{(S)} K} \rangle_{x \in \mathfrak{F}_I}$$

Megjegyezzük, hogy o.3.6 kimondja, hogy $p_I^{(S)} K \in Hom(\mathfrak{F}_I ,\ \mathbb{P}_{g \in \Gamma_I^{(S)} K}\, g^* \mathfrak{F}_I)$
Továbbá a következő tétel kimondja, hogy a $\langle p_I^{(S)} K ,\ p_I^{(S)} K^* \mathfrak{F}_I \rangle$ pár $S\mathbb{P}\,K$ -szabad S alatt. (Lásd a könyvben 146 old.)

III1.2T

Tétel:

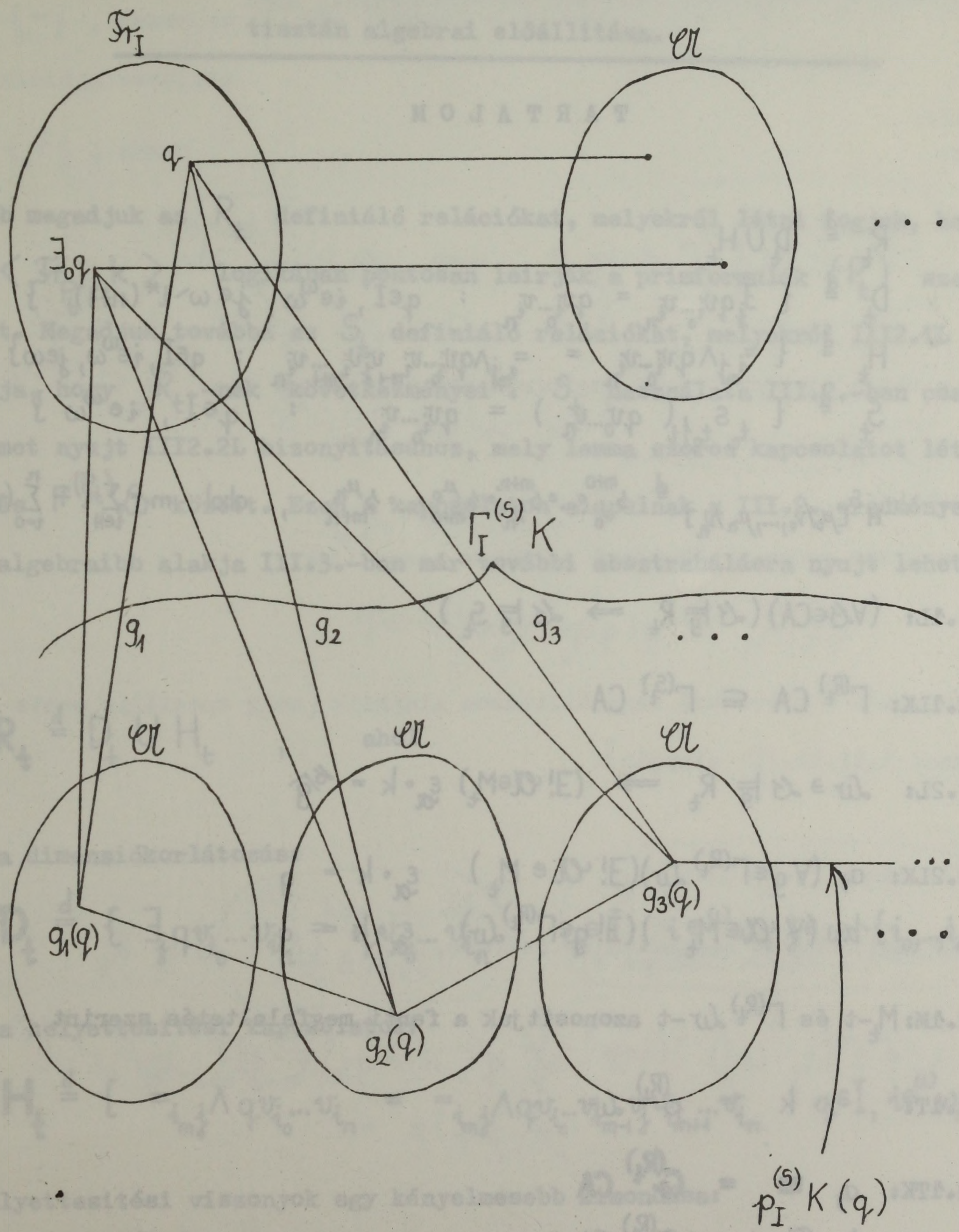
$$p_I^{(S)} K^{\,o} = \mathfrak{Cr}_I^{(S)} K$$

□

$$q \in I$$

$$S \overset{d}{=} \{ q = \exists_0 q \}$$

$$K \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A} \}$$



Ábra $\Gamma_I^{(S)} K$ és $p_I^{(S)} K$ definiciójához.

III.2.

Az $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t}, k \rangle$ logika szemantikájának tisztán algebrai előállitása

TARTALOM

$$R_t \overset{d}{=} D_t \cup H_t$$

$$D_t \overset{d}{=} \{ \exists_j q v_{i_0} \dots v_{i_n} = q v_{i_0} \dots v_{i_n} \ : \ q \in I,\ i \in {}^{\omega}\omega,\ j \in \omega \setminus i^*(n+1) \}$$

$$H_t \overset{d}{=} \{ =_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \dots v_{i_n} = =_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \dots v_{i_{m-1}} v_j v_{i_{m+1}} \dots v_{i_n} \ : \ q \in I,\ i \in {}^{\omega}\omega,\ j \in \omega \}$$

$$S_t \overset{d}{=} \{ {}_{t_q}S_{t_q/i}(q v_0 \dots v_n) = q v_{i_0} \dots v_{i_n} \ : \ q \in I,\ i \in {}^{\omega}\omega \}$$

$$H^{S[\mu_0/\nu_0, \dots, \mu_n/\nu_n]} \overset{d}{=} s_{\nu_0}^{m+0} \circ \dots \circ s_{\nu_n}^{m+n} \circ s_{m+0}^{\mu_0} \circ \dots \circ s_{m+n}^{\mu_n}, \quad \text{ahol} \quad m = \sum_{i \in H} i + \sum_{i=0}^{n} (\nu_i + \mu_i)$$

III2.1L: $(\forall \mathcal{B} \in CA)(\mathcal{B} \models_g R_t \Rightarrow \mathcal{B} \models_g S_t)$

III2.1LK: $\Gamma^{(R_t)} CA \subseteq \Gamma^{(S_t)} CA$

III2.2L: $\mathcal{L}r \ni \mathcal{B} \models_g R_t \Longrightarrow (\exists! \mathfrak{A} \in M_t)\ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \mathcal{B}/g$

III2.2LK: a) $(\forall g \in \Gamma^{(R_t)} \mathcal{L}r)(\exists! \mathfrak{A} \in M_t)\quad \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$

b) $(\forall \mathfrak{A} \in M_t)(\exists! g \in \Gamma^{(R_t)} \mathcal{L}r)\quad \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$

III2.1M: M_t-t és $\Gamma^{(R_t)} \mathcal{L}r$-t azonositjuk a fenti megfeleltetés szerint.

III2.1T: $k = p^{(R_t)} \mathcal{L}r$

III2.1TK: a) $\equiv = G^{(R_t)} CA$

b) $\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv} = \mathfrak{Fr}^{(R_t)} CA$

III2.2M: R_t szerkezete algebrailag légbőlkapott: a következő fejezetben segitünk ezen.

III.2. Az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k. \rangle$ logika szemantikájának tisztán algebrai előállitása.

Alább megadjuk az R_t definiáló relációkat, melyekről látni fogjuk, hogy az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ logikában pontosan leirják a primformulák (P_t) szerkezetét. Megadjuk továbbá az S_t definiáló relációkat, melyekről III2.1L bizonyitja, hogy R_t -nek "következményei". S_t használata III.2.-ben csak kényelmet nyujt III2.2L bizonyitásához, mely lemma szoros kapcsolatot létesit M_t és $\Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}v$ között. Ezen a kapcsolaton alapulnak a III.2. eredményei. S_t algebraibb alakja III.3.-ban már további absztrahálásra nyujt lehetőséget.

$$\mathbf{R_t} \overset{d}{=} D_t \cup H_t \quad , \qquad \text{ahol}$$

D_t a dimenziókorlátozás:

$$\mathbf{D_t} \overset{d}{=} \{ \exists_j q v_{i_0} \ldots v_{i_n} = q v_{i_0} \ldots v_{i_n} \ : \ q \in I \ , \ i \in {}^{\omega}\omega \ , \ j \in \omega \setminus \{i_0, \ldots, i_n\} \}$$

H_t a helyettesitési kapcsolatok:

$$\mathbf{H_t} \overset{d}{=} \{ =_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \ldots v_{i_n} \ = \ =_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \ldots v_{i_{m-1}} v_j v_{i_{m+1}} \ldots v_{i_n} \ : \ q \in I, \ i \in {}^{\omega}\omega, \ j \in \omega \}$$

A helyettesitési viszonyok egy kényelmesebb kimondása:

$$\mathbf{S_t} \overset{d}{=} \{ {}_{t_q}s_{t_q \upharpoonright i}(q v_0 \ldots v_n) = q v_{i_0} \ldots v_{i_n} \ : \ q \in I \ , \ i \in {}^{\omega}\omega \ \} \ ,$$ ahol ${}_H s_\sigma$ levezetett művelet: legyen H véges számhalmaz, és $[\mu_0/\nu_0, \ldots, \mu_n/\nu_n]$ a σ véges transzformáció kanonikus alakja, és $m \overset{d}{=} \sum_{i \in H} i + \sum_{i=0}^{n} (\nu_i + \mu_i)$. Ekkor $\ {}_H\mathbf{s}_\sigma \overset{d}{=} s_{\nu_0}^{m+0} \circ \ldots \circ s_{\nu_n}^{m+n} \circ s_{m+0}^{\mu_0} \circ \ldots \circ s_{m+n}^{\mu_n}$.

A következő lemma kimondja, hogy cilindrikus algebrákon az S_t definiáló relációk az R_t definiáló relációk következményei, azaz

III2.1L

Lemma:

$$(\forall \mathcal{B} \in CA)(\mathcal{B} \models_g R_t \implies \mathcal{B} \models_g S_t)$$

(Ezt a tényt tömören ugy is megfogalmazhattuk volna, hogy $S_t \subseteq C^{(R_t)}_t CA$.)

Bizonyitás:

A bizonyitás során a következő jelölést használjuk:

$$q i_0 \dots i_n \stackrel{d}{=} g(q v_{i_0} \dots v_{i_n})$$

A bizonyitás a következő segédállitáson alapszik (mely speciális esete a lemmának 1.11.11.(i) alapján):

Segédállitás:

A fenti jelöléseket használva és feltéve, hogy $CA \ni \mathcal{B} \models_g R_t$,

$$i_m \notin i^*(t_q \setminus \{m\}) \implies s_j^{i_m} q i_0 \dots i_n = q i_0 \dots i_{m-1} j i_{m+1} \dots i_n$$

A segédállitás bizonyitása:

Ha $i_m = j$, akkor az állitás triviális, hiszen $s_j^j x = x$, s_j^j definiciója szerint.

Ha $i_m \neq j$, akkor

$s_j^{i_m}$ def, H_t

$i_m \notin i^*(t_q \setminus \{m\})$, D_t

$i_m \neq j$

$\mathcal{B} \in CA$, 1.5.8.(i)

$$s_j^{i_m} q i_0 \dots i_n \doteq s_j^{i_m} q i_0 \dots i_{m-1} j i_{m+1} \dots i_n \doteq$$

$$= s_j^{i_m} c_{i_m} q i_0 \dots i_{m-1} j i_{m+1} \dots i_n \doteq$$

$$= c_{i_m} q i_0 \dots i_{m-1} j i_{m+1} \dots i_n \doteq$$

$$= q i_0 \dots i_{m-1} j i_{m+1} \dots i_n$$

□

Most a lemma bizonyitása:

$\widehat{\mathcal{B}/g}$ hom, ${}_H s_\tau$ def, $\pi_i \overset{d}{=} m+i$

$Rg\,\pi \cap Fd\, t_q \restriction i = 0$, π egy-egyértelmű, A segédáll. alapján indukcióval

$$\widehat{\mathcal{B}/g}\,({}_{t_q}S_{t_q \restriction i}\; q v_0 \dots v_n) \doteq s_{i_0}^{\pi_0} \dots s_{i_n}^{\pi_n} s_{\pi_0}^{0} \dots s_{\pi_n}^{n}\, q 0 \dots n \doteq q i_0 \dots i_n =$$

$$= g(q v_{i_0} \dots v_{i_n})$$

Tehát, $\mathcal{B} \models_g S_t$.

□

III2.1LK

Következmény:

$$\Gamma^{(R_t)} CA \subseteq \Gamma^{(S_t)} CA$$

□

III2.2L

Lemma:

Ha $\mathcal{W} \ni \mathcal{B} \models_g R_t$, akkor van pontosan egy $\mathfrak{A} \in M_t$, melyre

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \widehat{{}^{\mathcal{B}}g}$$

és igy nyilván ${}_{\mathfrak{A}}\tilde{\Omega} = \mathfrak{S}_g^{(\mathcal{B})} R g g$.

Bizonyitás:

Elég azt bizonyitani, hogy $\exists! \mathfrak{A}$, melyre igaz, hogy

$$P_t \upharpoonright \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g \text{ és } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_A ,$$

mert:

Minden $\mathfrak{A}$-ra $\widehat{{}^{\mathcal{B}}g}, \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_{P_t}, \mathcal{L}_A)$ és $P_t \upharpoonright \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$ -ből következik, hogy

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \widehat{{}^{\mathcal{B}}g}$$

$\mathcal{B} \in \mathcal{H}a$-ból következik, hogy $(\exists! A)\, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}_A$, tudniillik $\mathcal{B}$ egységeleme ${}^{\omega}A$.

$k(qv_0\dots v_n)_{\mathfrak{A}} = g(qv_0\dots v_n)$ teljesüléséhez A-n az $\mathfrak{A}_q$ reláció csak a következőképpen vehető fel:

$$\mathfrak{A}_q \stackrel{d}{=} \{\langle s_0,\dots,s_n\rangle : s\in g(qv_0\dots v_n)\}.$$

A most felvett egyetlen lehetséges $\mathfrak{A}$ struktura megfelel a követelményeknek, mert

$$
\begin{aligned}
k(qv_{i_0}\dots v_{i_n})_{\mathfrak{A}} &\overset{\text{k def.}}{\equiv} \{s : \langle s_{i_0},\dots,s_{i_n}\rangle\in\mathfrak{A}_q\} \overset{\mathfrak{A}_q \text{ def.}}{\equiv} \\
&= \{s : (\exists z\in g(qv_0\dots v_n))\langle z_0,\dots,z_n\rangle=\langle s_{i_0},\dots,s_{i_n}\rangle\} \overset{\mathfrak{B}\in L\omega,\ \text{technikai lemma a függelékben.}}{\equiv} \\
&= S_{t_q\restriction i}(g(qv_0\dots v_n)) \overset{CA\ni\mathfrak{B}\models_g R_t,\ \text{III2.1L}}{\equiv} \\
&= g(qv_{i_0}\dots v_{i_n})
\end{aligned}
$$

Evvel beláttuk,hogy $P_t\restriction \varepsilon_{\mathfrak{A}}\circ k = g.$

□

III2.2LK

Következmény:

a./ $(\forall g \in \Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}\!\mathit{w})(\exists!\, \mathfrak{A} \in M_t)\quad \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$

b./ $(\forall \mathfrak{A} \in M_t)(\exists!\, g \in \Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}\!\mathit{w})\quad \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$

Bizonyitás:

Ad a./ Triviálisan következik $\Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}\!\mathit{w}$ definiciójából III2.2L felhasználásával.

Ad b./ A megadott g függvény ($\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k^{M_t}$) eleme $\Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}\!\mathit{w}$ -nek.

□

III2.1M

Megjegyzés:

A fenti következmény szerint (III2.2LK) van egy kölcsönösen egyértelmü megfeleltetés $\Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}\!\mathit{w}$ és M_t között, mely szerint ezek minden számunkra érdekes szempontból egyenértéküek. Ezért a következőkben sokszor azonosnak tekintjük őket e megfeleltetés szerint. (Ilyen esetekben ezt jelezni fogjuk.)

□

III2.1T

Tétel:

M_t -t és $\Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}v$ -t azonositva:

$$k = p^{(R_t)}\mathcal{L}v$$

Bizonyitás:

Felhasználva, hogy ha $\mathfrak{A} \in M_t$ és $g \in \Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}v$ egymással azonositott elemek, akkor $\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$,

$D_0\, k = \mathfrak{Fr}_{P_t}$ $\qquad\qquad$ k^{M_t} def.

$$k \equiv \left\langle k^{M_t}(x) \right\rangle_{x \in \mathfrak{Fr}_{P_t}} \equiv$$

$\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$

$$= \left\langle \left\langle k(x)_{\mathfrak{A}} \right\rangle_{\mathfrak{A} \in M_t} \right\rangle_{x \in \mathfrak{Fr}_{P_t}} \equiv$$

$p^{(R_t)}\mathcal{L}v$ def.

$$= \left\langle \left\langle g(x) \right\rangle_{g \in \Gamma^{(R_t)}\mathcal{L}v} \right\rangle_{x \in \mathfrak{Fr}_{P_t}} \equiv$$

$$= p^{(R_t)}\mathcal{L}v$$

□

III2.1TK

Következmény:

a./ $$\equiv \;=\; \mathrm{Cr}^{(R_t)}\, CA$$

b./ $$\mathfrak{Fr}_{P_t/\equiv} \;=\; \mathfrak{Fr}^{(R_t)}\, CA$$

Bizonyitás:

Ad a./

III2.1T

$$\equiv \;=\; k^{M_t}\,\circ \;\stackrel{*}{=}$$

algebrai tétel: III1.2T

$$=\; p^{(R_t)}\,\mathcal{L}v\,\circ \;\stackrel{*}{=}$$

közvetve Gödel-t, azaz: II4.1T, II51TK, III1.1Tb,

$$=\; \mathrm{Cr}^{(R_t)}\,\mathcal{L}v \;\stackrel{*}{=}$$

D_t dimenziókorlátozás

$$=\; \mathrm{Cr}^{(R_t)}\,Lf \;\stackrel{*}{=}$$

$$=\; \mathrm{Cr}^{(R_t)}\,CA$$

Ad b./

III2.1TK a,)

□

III2.2M

Megjegyzés:

Az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ logika interpretálófüggvénye, k, egy meglehetősen természetes, tisztán algebrai fogalommal egybeesik, nevezetesen a $\rho^{(R_t)}\mathcal{L}\mathcal{V}$ szabadszorzattal. A szemantika ezen formájának algebrai természetességét csökkenti az, hogy P_t és R_t szerkezete algebrai szempontból légbőlkapott. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy van olyan - az elsőrendű predikátumkalkulussal egyenértékű - logika, mely ezzel a kis algebrai szépséghibával már nem rendelkezik. E logika nyelve, éppugy, mint szemantikája egybe fog esni teljesen természetes algebrai fogalmakkal. (A tautológikus formulaalgebra például a cilindrikus algebrák dimenziókorlátozott szabadalgebrája.)

□

III.3.

Változójelmentes elsőrendü predikátumkalkulus

TARTALOM

III3.1D: A változójelmentes elsőrendü pred.kalk. $\langle \mathfrak{Fr}_I, k \rangle$, ahol
$k \in Hom(\mathfrak{Fr}_I, \underset{\mathfrak{A} \in M_t}{\mathsf{P}} \mathfrak{L}_A)$; $k(q)_{\mathfrak{A}} \stackrel{d}{=} \{ s \in {}^{\omega}A : t_q \mid s \in \mathfrak{A}_q \}$.

III3.1L: $k^* \mathfrak{Fr}_I = k^* \mathfrak{Fr}_{P_t}$

III3.1LK: $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t}, k \rangle$ **ekvivalens** $\langle \mathfrak{Fr}_I, k \rangle$

III3.1M: Az $\mathfrak{Fr}_I$ nyelv kifejezőereje tehát megegyezik az $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ nyelv kifejezőerejéve[l]

III3.2D: a) $\mathfrak{A} \models_g t \stackrel{d}{\Longleftrightarrow} (\forall r \in I)(\forall i \notin t_r)\ c_i g_r = g_r$
b) $\Gamma^{(t)} K \stackrel{d}{=} \{ \mathfrak{A}_{\hat{g}} : \mathfrak{A} \models_g t, \mathfrak{A} \in K \}$
c) $\mathfrak{Fr}^{(t)} K$ stb. hasonlóan

III3.2M: A dimenziókorl. a definiálórelációk egy érdekes speciális esete.

III3.1T: $k = p^{(t)} \mathfrak{Lr}$

III3.3M: A logikát mostmár bevezethetjük egy tisztán algebrai konstrukcióként.
$\doteqdot \stackrel{d}{=} k^{\circ}$

III3.1TK: a) $\doteqdot = Cr^{(t)} CA$
b) $\mathfrak{Fr}_I / \doteqdot = \mathfrak{Fr}^{(t)} CA$

III3.4M: Az it.kalk.taut. form.alg.ja a szabad Boole-alg.; a t-tip. pred.kalk. taut. form.alg.ja a t-vel dim.korl.tt szabad cil.alg.

III3.5M: Az $\mathfrak{Fr}_I$ vizsgálatával $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ -ről is, az algebrákról is megtudtunk vmit.

III3.6M: a) A változójelmentes logikából kiindulva a szokásos kényelmes nyelvek előállithatók röviditések bevezetésével.
b) Az elsőr. logika ekvivalens változatai sokoldalu rendszert képeznek.
c) Be lehet épiteni szabályosságokat a nyelvbe (adekvát nyelvek)
d) Történetileg a beépült szabályosságokat kiemelve jutottunk $\mathfrak{Fr}_I$ -hez.
e) A bonyolultsági hierarhiában való közlekedés eszközei.

III3.7M: Más stratégiát is választhattunk volna a tanulmány felépitésénél.

III3.8M: A cil. alg. fogalma nélkül is összefoglalhatók az eredmények.

III3.9M: A felhasznált eszközök szükségességét a köv.fejezetben bizonyitjuk.

III.3. Változójelmentes elsőrendü predikátumkalkulus.

Ebben a fejezetben megadunk egy, az elsőrendü logikával ekvivalens logikát, melynek mostmár nyelve is és szemantikája is tisztán algebrai konstrukció.

III3.1D

Definició:

Legyen $t \in {}^{I}\omega$ egy tipus.

A most bevezetendő $\langle \mathfrak{Fr}_I , \mathfrak{k} \rangle$ logika*/ ugyanazon interpretációkat és ugyanazon igazságértékekkel kezel, mint az $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t} , k \rangle$ logika*/, ennek megfelelően:

$$\mathfrak{k} \in Hom\left(\mathfrak{Fr}_I, \underset{\mathfrak{A} \in M_t}{\mathbb{P}} \mathcal{L}_A\right)$$ olyan, hogy minden $\mathfrak{A} \in M_t$ -re

$$\mathfrak{k}(q)_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \{ s \in {}^{\omega}A : t_q \upharpoonright s \in \mathfrak{A}_q \}.$$

$\square$

---

*/ A $\mathfrak{k}$ és k jeleket különböző betükként használjuk.

III3.1L

Lemma:

$$\mathfrak{k}^* \mathfrak{F}_I = \mathfrak{K} = k^* \mathfrak{F}_{P_t}$$

Bizonyitás:

Legyen $\mathbb{P}_t$ a főprimformulák halmaza, azaz

$$\mathbb{P}_t \stackrel{d}{=} \{ q v_0 \dots v_n \ : \ q \in \ddot{I} \}$$

Mivel tudjuk, hogy $\mathfrak{K} \models_k R_t$, III2.1L alapján

$\mathfrak{K} \models_k S_t$, S_t alakja miatt ez azt mondja ki, hogy

$$\mathfrak{G}_g^{(\mathfrak{a} \in M_t^{\mathbb{P}} \mathcal{L}_A)} k^* \mathbb{P}_t = \mathfrak{K} .$$

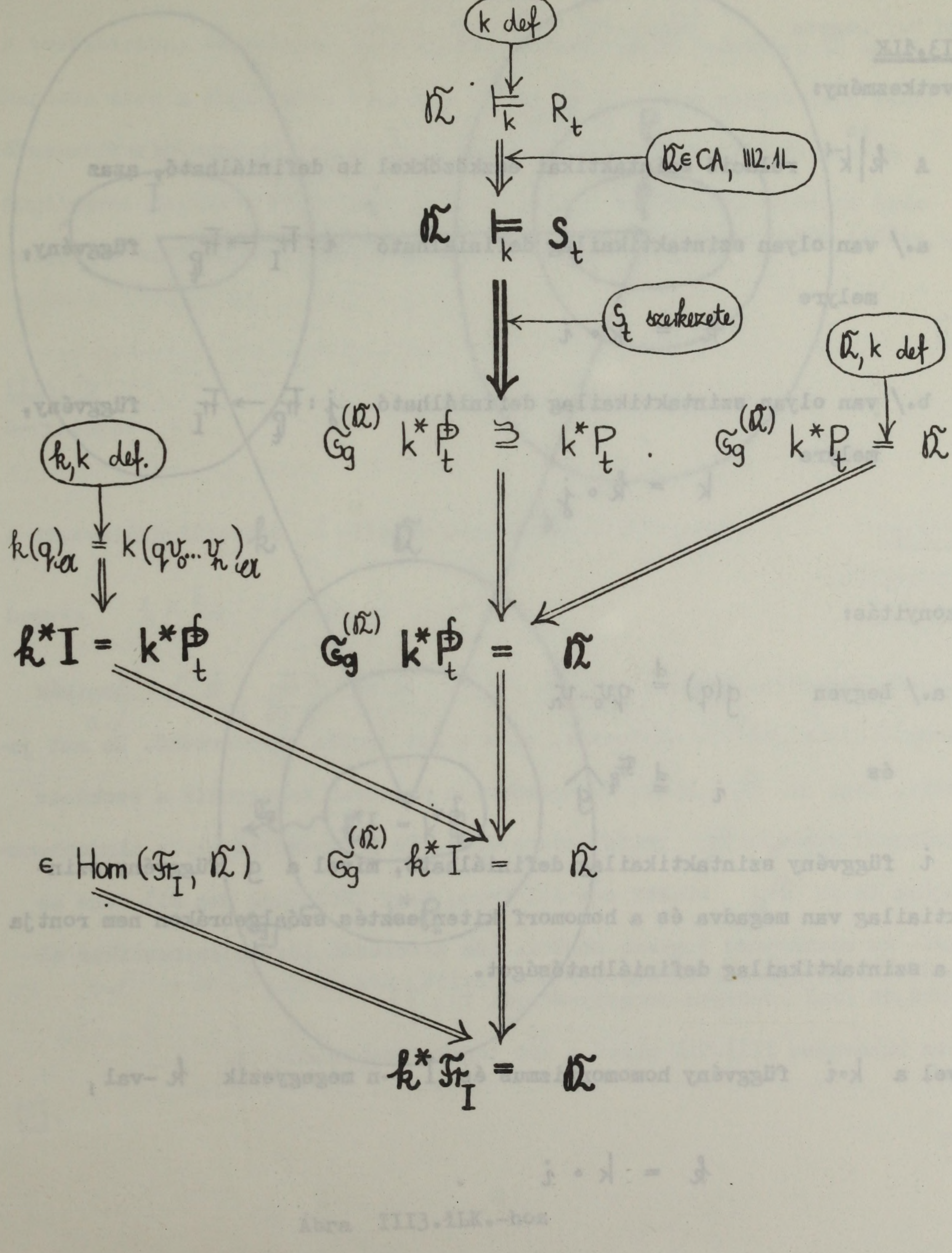
De $\mathfrak{k}(q)_{\mathfrak{a}} = k(q v_0 \dots v_n)_{\mathfrak{a}}$, és ezért $\mathfrak{k}^* I = k^* \mathbb{P}_t$, és igy

$$\mathfrak{G}_g^{(\mathfrak{a} \in M_t^{\mathbb{P}} \mathcal{L}_A)} \mathfrak{k}^* I = \mathfrak{K}$$

, ami azt jelenti, hogy

$$\mathfrak{k}^* \mathfrak{F}_I = \mathfrak{K} .$$

□



Ábra III3.1L.-hez

III3.1LK

Következmény:

A $\mathscr{k}|k^{-1}$ reláció szintaktikai eszközökkel is definiálható, azaz

a./ van olyan szintaktikailag definiálható $i : \mathcal{F}_I \rightarrow \mathcal{F}_{P_t}$ függvény, melyre

$$\mathscr{k} = k \circ i$$

b./ van olyan szintaktikailag definiálható $j : \mathcal{F}_{P_t} \rightarrow \mathcal{F}_I$ függvény, melyre

$$k = \mathscr{k} \circ j$$

Bizonyitás:

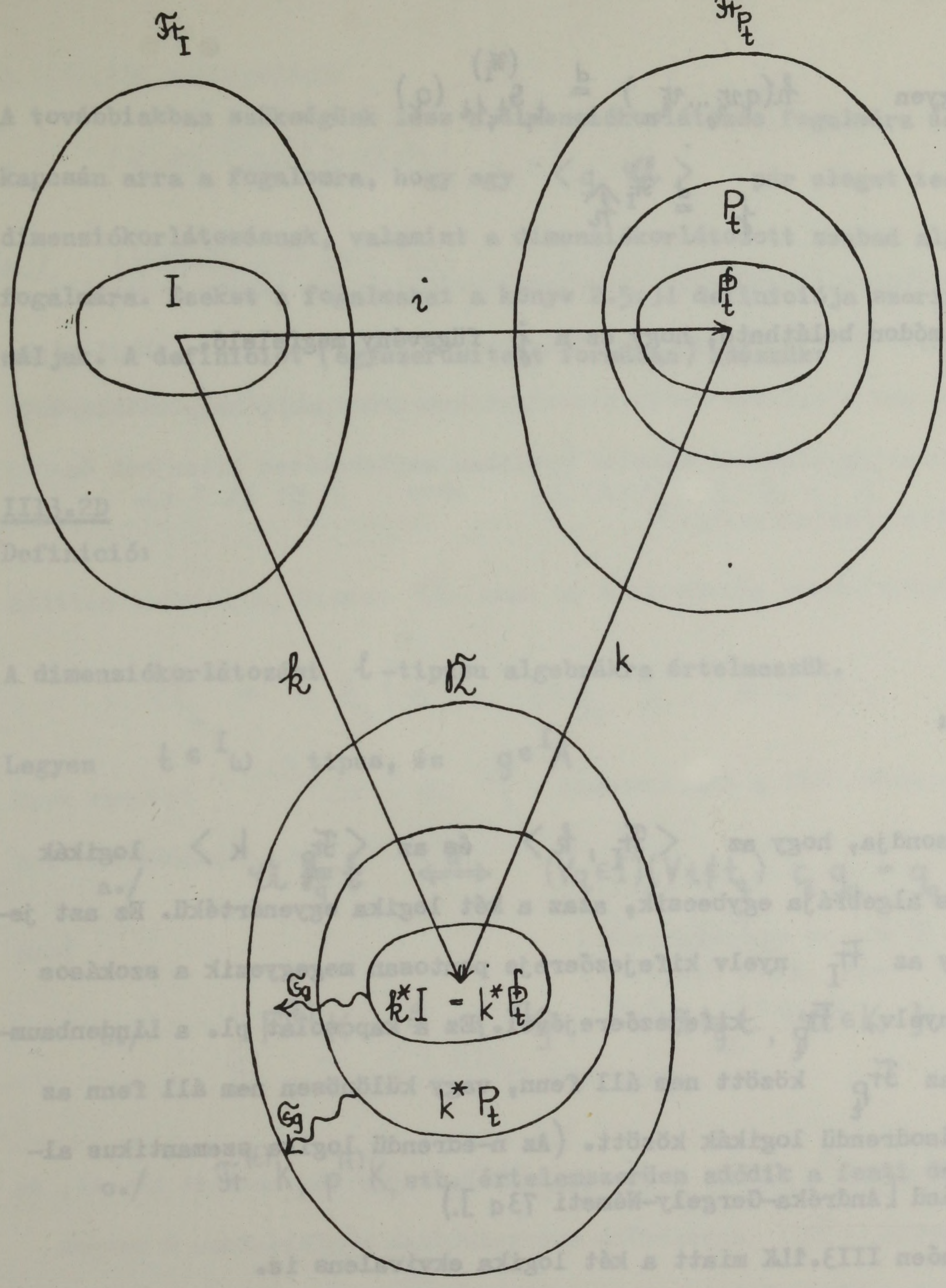
Ad a./ Legyen $g(q) \stackrel{d}{=} qv_0 \dots v_n$

és $i \stackrel{d}{=} {}^{\mathcal{F}_{P_t}}\widehat{g}$

Az i függvény szintaktikailag definiálható, mivel a g függvény szintaktiailag van megadva és a homomorf kiterjesztés szóalgebrákon nem rontja el a szintaktikailag definiálhatóságot.

Mivel a $k \circ i$ függvény homomorfizmus és I -n megegyezik $\mathscr{k}$ -val,

$$\mathscr{k} = k \circ i \quad .$$



Ábra III3.1LK.-hoz

Ad b./ Legyen $h(q v_{i_0} \ldots v_{i_n}) \stackrel{d}{=} {}_{t_q}S^{(\mathfrak{Fr}_I)}_{t_q/i}(q)$

és $j \stackrel{d}{=} {}^{\mathfrak{Fr}_I}\hat{h}$

Az előbbi módon belátható, hogy ez a j függvény megfelelő.

□

III3.1M

Megjegyzés:

III3.1L kimondja, hogy az $\langle \mathfrak{Fr}_I , k \rangle$ és az $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t} , k \rangle$ logikák szemantikus algebrája egybeesik, azaz a két logika egyenértékü. Ez azt jelenti, hogy az $\mathfrak{Fr}_I$ nyelv kifejezőereje pontosan megegyezik a szokásos elsőrendü nyelv, $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ kifejezőerejével. Ez a kapcsolat pl. a Lindenbaum-logika és az $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ között nem áll fenn, vagy különösen nem áll fenn az első- és másodrendü logikák között. (Az n-edrendü logika szemantikus algebráját lásd [Andréka-Gergely-Németi 73a].)

Ezen tulmenően III3.1LK miatt a két logika ekvivalens is.

□

A továbbiakban szükségünk lesz a dimenziókorlátozás fogalmára és ennek kapcsán arra a fogalomra, hogy egy $\langle g, \mathfrak{A} \rangle$ pár eleget tesz adott dimenziókorlátozásnak, valamint a dimenziókorlátozott szabad algebra fogalmára. Ezeket a fogalmakat a könyv 2.5.31 definiciója szerint használjuk. A definiciót (egyszerüsitett formában) idézzük:

III3.2D
Definició:

A dimenziókorlátozást t-tipusu algebrákra értelmezzük.

Legyen $t \in {}^{I}\omega$ tipus, és $g \in {}^{I}A$

a./ $$\mathfrak{A} \models_g t \overset{d}{\iff} (\forall q \in I)(\forall i \notin t_q)\ c_i g_q = g_q$$

b./ $$\Gamma^{(t)} K \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A}/\hat{g} \quad \mathfrak{A} \models_g t,\ \mathfrak{A} \in K \}$$

c./ $\mathfrak{Fr}^{(t)} K$, $\rho^{(t)} K$, stb. értelemszerüen adódik a fenti definicióból.

□

III3.3M

Megjegyzés:

III3.1T lehetővé teszi az elsőrendü logikának egy, az eddigieknél "matematikaibb" bevezetését: Definiálhatjuk az elsőrendü logikát az $\langle \mathfrak{Fr}_I , p^{(t)}\mathcal{L}\mathfrak{r} \rangle$ párként, azaz egy tisztán algebrai konstrukcióként. Szavakban: a t-tipusu elsőrendü logika nem más, mint a lokálisan f. véges halmazalgebrák t-vel dimenziókorlátozott szabadszorzata, összekapcsolva a megfelelő szóalgebrával.

□

Jelöljük az $\mathfrak{Fr}_I$ szemantikus ekvivalenciáját $\triangleq$-vel, azaz

$$\triangleq \stackrel{d}{=} k^{o}$$

III3.1TK

Következmény:

a./ $\triangleq \; = \; Cr^{(t)} CA$

b./ $\mathfrak{Fr}_I/_{\triangleq} \; = \; \mathfrak{Fr}^{(t)} CA$

Bizonyitás:

Teljesen analóg a III2.1TK bizonyitásával:

Ad a./

$$\triangleq \;=\; k^{\circ} \;=\; p^{(t)}\mathcal{Lw}^{\circ} \;=\; \mathfrak{Gr}^{(t)}\mathcal{Lw} \;\overset{\text{teljességi } t}{\triangleq}\; \mathfrak{Gr}^{(t)}\mathrm{Lf} \;\overset{Rg\,t \subseteq \omega}{\triangleq}\; \mathfrak{Gr}^{(t)}\mathrm{CA}$$

Ad b./

Közvetlenül adódik e tétel a./ pontjából és $\mathfrak{Fr}^{(t)}\mathrm{K}$ definiciójából.

□

III3.4M

Megjegyzés:

A predikátumkalkulus algebrai vizsgálatában eljutottunk arra a szintre, amelyen az itéletkalkulus algebrai leirása áll: ahogyan az itéletkalkulus tautológikus formulaalgebrája a szabad Boole-algebra*/, ugy a t-tipusu predikátumkalkulus tautológikus formulaalgebrája a t-vel dimenziókorlátozott szabad cilindrikus algebra.

□

---

*/ Pontosabban, a V itéletváltozókkal rendelkező itéletkalkulus formulaalgebrája a V-vel generált szabad Boole-algebra.

III3.5M

Megjegyzés:

Az $\mathfrak{Fr}_I$ nyelv vizsgálata során az $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ nyelvről is további információkhoz jutottunk, nevezetesen

$$\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv} \cong \mathfrak{Fr}^{(t)}CA$$

sőt az izomorfiát biztosító függvényt is ismerjük;

az algebrákkal kapcsolatban pedig kiderült, hogy

$$p^{(t)}\mathcal{L}\mathcal{v}^{*}\,\mathfrak{Fr}_I = p^{(R_t)}\mathcal{L}\mathcal{v}^{*}\,\mathfrak{Fr}_{P_t}$$

és hogy

$$\mathfrak{Fr}^{(t)}CA = \mathfrak{Fr}^{(t)}\mathcal{L}\mathcal{v} \cong \mathfrak{Fr}^{(R_t)}\mathcal{L}\mathcal{v} = \mathfrak{Fr}^{(R_t)}CA$$

□

III3.6M

Megjegyzés:

a./ A III.3. fejezet eredményeként a t-tipusu elsőrendü (egyenlőséges) logikát be lehet vezetni egy tisztán algebrai konstrukcióként, nevezetesen az $\langle \mathfrak{Ft}_I , p^{(t)} \mathcal{L}w \rangle$ párként.

Konkrétan:

Csak az $\langle \mathfrak{Ft}_I , k \rangle$ logika létezését fogadjuk el és az $\mathfrak{Ft}_{P_t}$ elemeit az $\mathfrak{Ft}_I$ elemeire utaló nevekként definiáljuk. Másszóval $\mathfrak{Ft}_{P_t}$ nem más, mint az $\mathfrak{Ft}_I$ elemeinek röviditett, szemléletesebb irásmódja.

Általában, az $\mathfrak{Ft}_I$ nyelv kényelmesebb használatára különböző egyezményes röviditéseket ill. jelöléseket vezethetünk be, pl. infix irásmód, speciális kvantorok, változójelek (evvel jutunk el az $\mathfrak{Ft}_{P_t}$ -hez), függvényjelek, levezetett logikai jelek, stb.

Jelen szempontból legfontosabb röviditès a változójelek bevezetése.

Ezt a következő szabályokkal adjuk meg:

Jelentse $\alpha \vdash \beta$ azt, hogy α a β röviditése.

Most:

$$q v_{i_0} \ldots v_{i_n} \vdash {}_{t_q}S_{t_q} 1 i \; q$$

Például, ha $t_q - 2$, akkor

$$q v_0 v_1 \vdash \dot{q}$$

$$q v_3 v_0 \vdash \exists_5(=_{53} \wedge \exists_6(=_{60} \wedge \exists_0(=_{05} \wedge \exists_1(=_{16} \wedge q))))$$

és összetett formulákra értelemszerüen,

pl. $\neg q v_0 v_1 \vdash \neg q$

Mint a felsorolásban emlitettük, a röviditések bevezetését folytatva a most kapott Ft_{P_t} nyelvből előállitható az un. függvényjeles elsőrendü nyelv is, jelöljük azt $Ft_{P_{K_t}}$ -vel.
(Pl., ha $\oplus \in I$ egy kétargumentumu fügvényjellé röviditendő, akkor

$$q v_2 \oplus v_0 v_1 \vdash \neg \exists_3(\oplus v_0 v_1 v_3 \wedge \neg q v_2 v_3) \quad .)$$

A röviditések bevezetését tovább folytatva előállitható a szokásos, legkényelmesebb elsőrendü nyelv is, melynek minden szava tulajdonképpen neve egy Ft_I -beli (általában hosszabb és bonyolultabb) szónak.

b./ Több logikáról (csak a nyelveket emlitve Ft_I , Ft_{P_t} , $Ft_{P_{K_t}}$ stb.) beláttuk, hogy ekvivalensek; sőt mindegyikről beláttuk, hogy identikus az Ft_I logikával és a különbözőség csupán a röviditések használatából ered.

Ez egy sokoldalu rendszert ad kezünkbe az elsőrendü logika kezelésére. Az ekvivalencia lehetővé teszi, hogy mindegyik alakot akkor használjuk, amikor legalkalmasabb. Pl. a teljességi tétel itt adott bizonyitására az Ft_{P_t} , mig az [Enderton 72] -ben adottra az $Fr_{P_{K_t}}$ alkalmasabb, a varietás fogalmának kezelésére az $Fr_{P_{K_t}}$. A III3. fejezetben bizonyitott ekvivalencia további ilyen lehetőségeket kinál. Valószinünek látszik, hogy igen sok dolog van, amit teljesen értelmetlen lenne az Fr_{P_t} -ről és nem az Fr_I -ről bizonyitani. (Pl. az elméletek az Fr_I -ben is az 1-ideálok.) Ezt a sokoldaluságot illusztrálja, hogy $Fr_{P_{K_t}}$ háromszintü, Fr_{P_t} kétszintü, Fr_I pedig egyszintü: pl. bizonyos tulajdonságokat könnyebb egyszintü rendszerről látni, másrészt valamilyen további rendszer esetleg könnyebben felépithető egy háromszintüből (pl. [Hayes 71]) stb. Természetesen, az Fr_I logikából nem lehet minden logikát igy "elérni", pl. a másodrendü logikát sem, hiszen annak kifejezőereje nagyobb, mint Fr_I -é (lásd III3.1L megjegyzését).

c./ Általában, röviditésnél szabályosságokat épitünk be a nyelvbe, pontosan azokat, melyek a röviditést lehetővé teszik. (Pl. a P_t szerkezetébe pontosan H_t van beépitve; lásd még III.4.) Az igy kapott rendszer matematikai leirása bonyolultabb, hiszen ezeket a szabályosságokat is tükrözni kell. Ugyanakkor a matematikai konstrukció is egyre légbőlkapottabbá válik, hiszen ezek a szabályosságok többnyire kényelmi szempontokat tükröznek (mint pl. P_t). */

---

*/ A P_t röviditès szerkezete légbőlkapottabb a K_t röviditès szerkezeténél, és valóban, P_t csak kényelmi célokat szolgál, mig K_t valamiféle szerkezet tükrözését is. (K_t a függvényjeles logika kifejezéseinek halmaza.)

Másrészt, ez a jelenség felhasználható lenne olyan nyelvek konstruálására, melyek szerkezete a vizsgálandó jelenség "lényegét" tükrözi (adekvát nyelvek kutatási irányzata).

d./ Elmondtuk, hogy az Fr_I nyelvből hogyan lehet felépiteni a bonyolultabb nyelveket. Történetileg azonban az Fr_I nyelv megszerkesztésénél a forditott utat jártuk be a röviditések miatt heterogén szerkezetü logikák felől - a rövidítésekbe beépült szerkezetet különválasztva a logikától - az egyszerü szerkezetü felé:

Az Fr_I bevezetése annak az egyszerüsitési folyamatnak folytatása, melyben a függvényjeles logikáról bebizonyitották*/, hogy ekvivalens az Fr_{P_t} logikával és igy háromszintü helyett csak kétszintü logikát kellett vizsgálni.

Az $Fr_{P_{K_t}}$ nyelv háromszintü: első szint a kifejezések képzése, K_t
második a primformuláké, P_{K_t}
harmadik az összetett formuláké, $Fr_{P_{K_t}}$

Az $Fr_{P_{K_t}}$ nyelvet jobban megértve vissza lehetett vezetni az egyszerübb szerkezetü, már csak kétszintü Fr_{P_t} nyelvre. Ez sok bizonyitást leegyszerüsitett. Bizonyos kérdésekben azonban továbbra is sok kényelmetlenséget okoz a második szintképzés, a primformuláké. Ráadásul, ez a szerkesz-

---

*/ Az ekvivalencia egy preciz és részletes bizonyitása pl. az [Andréka-Gergely-Németi 73a] cikkben található. Ennek preciz bizonyitásával az irodalomban még nem találkoztunk.

tés nem mutat semmilyen algebrai jelleget. Avval, hogy a P_t szerkezetét megfogalmaztuk az algebra nyelvén (R_t) , mélyebben megértettük az Fr_{P_t} nyelvet és mód nyilt a második szintképzés eliminálására is. Megszerkeszthettük az egyszintü, tisztán algebrai felépitésü Fr_I nyelvet (és hozzá a szemantikát is ugyanigy). Az Fr_I nyelv könnyebben kezelhető, mert változójelmentes, igy megszüntek pl. a helyettesitési gondok, stb. Általában, az Fr_I szerkezete jóval egyszerübb, mint Fr_{P_t} szerkezete, hiszen az utóbbi kétszintü. Jól mutatja azt, hogy ez a kétszintüség a nyelv algebrai kezelését megneheziti az a tény, hogy a H_t definiáló relációkat is meg kellett adni (lásd még a következő fejezetet) Fr_{P_t} -re, mig a vele ekvivalens Fr_I -re csak dimenziókorlátozást kellett adni.

e./Összefoglalva:

A bonyolultsági hierarhián felfelé haladva uj röviditéseket vezetünk be, ügyelve arra, hogy ennek kizárólagos következménye az egyes szinonimaosztályok bővülése legyen. (Ez jelenti azt, hogy a definicióelméleti szabályokat betartjuk.)

A hierarhián lefelé haladva viszont a szinonimaosztályokat szükitjük ugy, hogy kiválasztunk a nyelvből egy szintaktikailag definiálható, teljesen reprezentáns beágyazott nyelvet. (Az, hogy teljesen reprezentáns, azt jelenti, hogy minden szinonimaosztályból legalább egy elem szerepel a beágyazott nyelvben.)

□

III3.7M

Megjegyzés:

Sok tekintetben egyszerübb lett volna az elsőrendü logika algebrai vizsgálatát a következő sorrendben felépiteni:

Először az $\langle \mathfrak{F}_I , k \rangle$ logikát vezettük volna be, algebrai eszközök nélkül, és bebizonyitottuk volna az $\mathfrak{F}_I$ -ről, hogy az $\mathfrak{F}_{P_t}$ -be beágyazott teljesen reprezentáns nyelv, és igy az $\langle \mathfrak{F}_I , k \rangle$ ekvivalens a szokásos elsőrendü logikával. Ezt megtehettük volna algebrai eszközök nélkül. Ezután az elsőrendü logika algebrai vizsgálatához elegendő lett volna az $\langle \mathfrak{F}_I , k \rangle$ vizsgálata, azaz a III.3. fejezet második fele. (A teljességi tétel a k algebrai vizsgálatánál, azaz $\doteq\ = Cr^{(t)}CA$ bizonyitásánál kell.)

$\square$

III3.8M

Megjegyzés:

A "cilindrikus algebra" fogalom használata nélkül is összefoglalhatók a III. fejezet eredményei. Ezt csak részben tesszük meg, a folytatás már értelemszerü:

$$\triangleq \; = \; Cr^{(t)}\, \mathcal{L}r$$

$$\mathfrak{Fr}_T/_{\triangleq} = \mathfrak{Fr}^{(t)}\, \mathcal{L}r$$

$$k = p^{(t)}\, \mathcal{L}r$$

Tehát az elsőrendü logikát előállithatjuk tisztán algebrai konstrukcióként, CA nélkül is, csupán a szemléletes $\mathcal{L}r$ fogalomra támaszkodva. Ezek az összefüggések tulajdonképpen a II. fejezetbe illenének, de olyan erősen támaszkodnak algebrai fogalmakra, hogy célszerübb volt a III.fejezetbe tenni. Érdekes még megjegyezni, hogy a tételek e formájának bizonyitásához a teljességi tételre nincs szükség. Tekintve, hogy CA algebrai szempontból jelentősebb*/ és könnyebben kezelhető osztály, mint $\mathcal{L}r$, érdemes volt a fenti tételeket CA -ra is bizonyitani, annak ellenére, hogy ehhez a teljessségi tételre is szükség volt. A $Cr^{(t)}\,\mathcal{L}r$ a szemantikus ekvivalenciának nem olyan "tisztán" algebrai előállitása, mint $Cr^{(t)}CA$.

□

*/ A könyv szerint (Foreword) pontosan ez a CA egyik fő jelentősége: A $\mathcal{H}a$ és $\mathfrak{S}$ algebrákat beágyazza egy algebrailag jól kezelhető algebraosztályba. A jólkezelhetőség érdekében CA -t nagyobb választották, mint $\mathbf{HSP}(\mathcal{H}a \cup \mathfrak{S})$.

III3.9M

Megjegyzés:

A következő fejezetben bebizonyitjuk, hogy a szemantikus ekvivalencia algebrai jellemzését nem lehetett volna lényegesen egyszerübb eszközökkel - definiáló relációk nélkül - megoldani. Sőt ez $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ -ben még egyszerü dimenziókorlátozással sem oldható meg. Ahhoz, hogy ezt megtehessük, az $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ -be beépült logikailag fölösleges szerkezetet el kellett távolitani.

□

III.4.

A definiálórelációk szükségessége

TARTALOM

III4.1T: Van t tipus, melyre

1a.) $$\begin{array}{ccccc} & \subset & \mathrm{Gr}^{(D_t)}CA & \subset & \\ \mathrm{Gr}_{P_t}CA & & & & \mathrm{Gr}^{(D_t\cup H_t)}CA \\ & \subset & \mathrm{Gr}^{(H_t)}CA & \subset & \end{array}$$

1b.) $\mathrm{Gr}_I CA \subset \mathrm{Gr}^{(t)} CA$

III4.2T: Ha $t=0$, akkor

1a.) $$\begin{array}{ccccc} & = & \mathrm{Gr}^{(D_t)}CA & = & \\ \mathrm{Gr}_{P_t}CA & & \cap \| \cup & & \mathrm{Gr}^{(D_t\cup H_t)}CA \\ & = & \mathrm{Gr}^{(H_t)}CA & = & \end{array}$$

1b.) $\mathrm{Gr}_I CA = \mathrm{Gr}^{(t)} CA$

Ha $t \neq 0$, akkor

2a.) $$\begin{array}{ccccc} & \neq & \mathrm{Gr}^{(D_t)}CA & \neq & \\ \mathrm{Gr}_{P_t}CA & & \cancel{\cap \| \cup} & & \mathrm{Gr}^{(D_t\cup H_t)}CA \\ & \neq & \mathrm{Gr}^{(H_t)}CA & \neq & \end{array}$$

2b.) $\mathrm{Gr}_I CA \neq \mathrm{Gr}^{(t)} CA$

III4.1M: Az ℓ tipushoz ragaszkodva nem lehet $\equiv$-t egyenletekkel megadni:

III4.3T: Nincs (ℓ-tipusu) K algebraosztály, melyre

a.) $\equiv \; = \mathrm{Gr}_{P_t} K$, vagy

b.) $\doteq \; = \mathrm{Gr}_I K$

III4.2M: $\sim(\exists K)(\, \mathrm{Gr}^{(D_t)} CA = \mathrm{Gr}_{P_t} K \vee \mathrm{Gr}^{(H_t)} CA = \mathrm{Gr}_I K \,)$

III4.3M: $t = 0$ csakkor $(\exists K) \equiv \; = \mathrm{Gr}_{P_t} K$ csakkor $(\exists K) \doteq \; = \mathrm{Gr}_I K$

III.4. A definiáló relációk szükségessége.

Be fogjuk látni, hogy a szemantikus ekvivalencia megadásából nem hagyhatók el azok a definiáló relációk, melyeket a III.2. és a III.3. fejezetben erre használtunk. Tehát pl. a cilindrikus egyenletek önmagukban egy, a szemantikus ekvivalenciánál gyengébb ekvivalenciát definiálnak a formulákon. Ezen tulmenően belátjuk, hogy a szemantikus ekvivalencia nem is adható meg definiáló relációk használata nélkül.

III4.1T

Tétel:

Van olyan tipus, melyre fennállnak a következő egyenlőtlenségek ($\subset$ a "valódi része" jele):

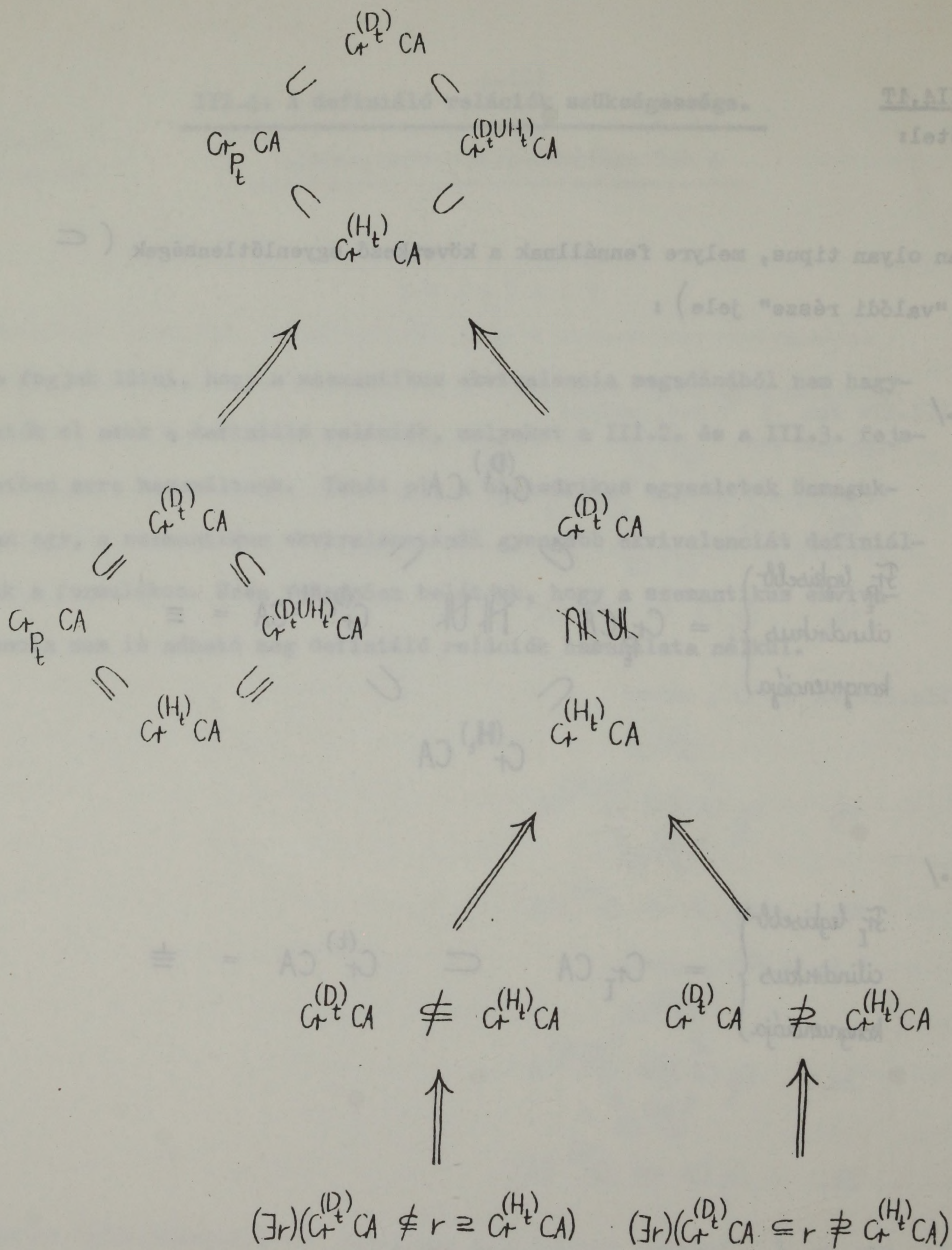
a./

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{Fr}_{P_t}\text{ legkisebb}\\ \text{cilindrikus}\\ \text{kongruenciája}\end{array}\right\} = \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & Cr^{(D_t)}\,CA \arrow[dr, phantom, "\subset" sloped] \arrow[dd, phantom, "\not\subset\ \not\supset"] & \\ Cr_{P_t}\,CA \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] \arrow[dr, phantom, "\subset" sloped] & & Cr^{(D_t \cup H_t)}\,CA = \equiv \\ & Cr^{(H_t)}\,CA \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & \end{tikzcd}$$

b./

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{Fr}_{I}\text{ legkisebb}\\ \text{cilindrikus}\\ \text{kongruenciája}\end{array}\right\} = Cr_{I}\,CA \subset Cr^{(t)}\,CA = \doteq$$

Bizonyitás:



Ábra III4.1T.a./ -hoz

Ad a./ A következő ábrát rögtön felrajzolhatjuk a definiáló relációk tartalmazási viszonyai miatt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Cr}^{(D_t)}\mathrm{CA} & \\ \mathrm{Cr}_{P_t}\mathrm{CA} \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \mathrm{Cr}^{(D_t \cup H_t)}\mathrm{CA} \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq"] \\ & \mathrm{Cr}^{(H_t)}\mathrm{CA} \arrow[ul, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

Ezután, ha bizonyitjuk, hogy $\mathrm{Cr}^{(D_t)}\mathrm{CA}$ és $\mathrm{Cr}^{(H_t)}\mathrm{CA}$ között semmilyen tartalmazás nem állhat fenn, akkor mind a négy tartalmazásról bizonyitottuk, hogy valódi, hiszen bármely egyenlőség az ábrán $\mathrm{Cr}^{(D_t)}\mathrm{CA}$ és $\mathrm{Cr}^{(H_t)}\mathrm{CA}$ közti valamilyen irányu tartalmazást eredményezne.

Tehát, a következőt bizonyitjuk:

$$\begin{array}{c} \mathrm{Cr}^{(D_t)}\mathrm{CA} \\ \not\supseteq \; \not\subseteq \\ \mathrm{Cr}^{(H_t)}\mathrm{CA} \end{array}$$

és ez maga után vonja, hogy

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Cr}^{(D_t)}\mathrm{CA} & \\ \mathrm{Cr}_{P_t}\mathrm{CA} \arrow[ur, phantom, sloped, "\not\subseteq"] & & \mathrm{Cr}^{(D_t \cup H_t)}\mathrm{CA} \arrow[ul, phantom, sloped, "\not\supseteq"] \\ & \mathrm{Cr}^{(H_t)}\mathrm{CA} \arrow[ul, phantom, sloped, "\not\subseteq"] \arrow[ur, phantom, sloped, "\not\subseteq"] & \end{tikzcd}$$

A bizonyitás menete pedig a következő lesz:

Keresünk olyan r halmazt, melyre

$$Cr^{(H_t)}CA \subseteq r \not\supseteq Cr^{(D_t)}CA$$

mert ebből már következik, hogy

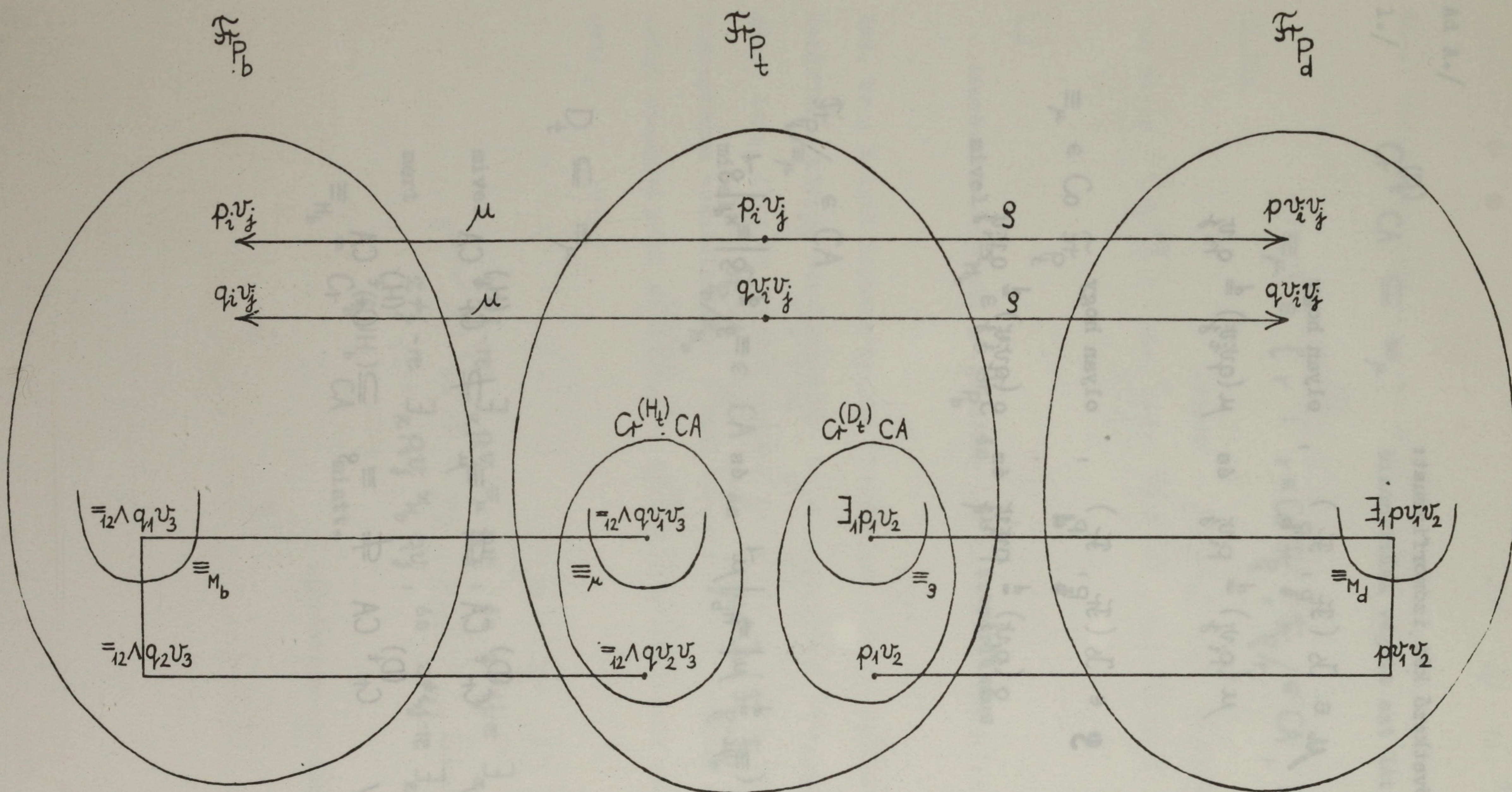
$$Cr^{(D_t)}CA \not\subseteq Cr^{(H_t)}CA$$

Ezután hasonlóan járunk el a forditott irányban is.

Legyen $\quad \mathbf{t} \overset{d}{=} \{\langle p_i,1\rangle, \langle q,2\rangle \ : \ i\in\omega\}$

továbbá $\quad \mathbf{b} \overset{d}{=} \{\langle p_i,1\rangle, \langle q_i,1\rangle \ : \ i\in\omega\}$

$$\mathbf{d} \overset{d}{=} \{\langle p,2\rangle, \langle q,2\rangle\}$$



Ábra III4.1T. - hez

Vegyük a következő két izomorfizmust:

$$\mu \in \mathfrak{Is}(\mathfrak{F}_{P_t}, \mathfrak{F}_{P_b}) \quad , \text{ olyan hogy}$$

$$\mu(p_i v_j) \overset{d}{=} p_i v_j \quad \text{és} \quad \mu(q v_i v_j) \overset{d}{=} q_i v_j$$

és

$$\varrho \in \mathfrak{Is}(\mathfrak{F}_{P_t}, \mathfrak{F}_{P_d}) \quad , \text{ olyan hogy}$$

$$\varrho(p_i v_j) \overset{d}{=} p v_i v_j \quad \text{és} \quad \varrho(q v_i v_j) \overset{d}{=} q v_i v_j$$

Legyen most

$$\equiv_\mu \overset{d}{=} \mu \big| \equiv_{M_b} \big| \mu^{-1} \quad \text{és} \quad \equiv_\varrho \overset{d}{=} \varrho \big| \equiv_{M_d} \big| \varrho^{-1}$$

Állitás:

A./ $$Cr^{(D_t)} CA \subseteq \equiv_\mu \not\supseteq Cr^{(H_t)} CA$$

B./ $$Cr^{(D_t)} CA \not\subseteq \equiv_\varrho \supseteq Cr^{(H_t)} CA$$

Mert:

Ad A./

1./ $\quad Cr^{(D_t)} CA \subseteq \equiv_\mu$ bizonyitása végett azt látjuk be, hogy

$$\equiv_\mu \in \{ r : r \in Co\, \mathfrak{Fr}_{P_t} ,\ \mathfrak{Fr}_{P_t}/_r \in CA ,\ D_t \subseteq r \}$$

$\equiv_\mu \in Co\, \mathfrak{Fr}_{P_t}$

mivel $\equiv_{M_b} \in Co\, \mathfrak{Fr}_{P_b}$ és μ izomorfizmus

$\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv_\mu} \in CA$

mivel $\mathfrak{Fr}_{P_b}/_{\equiv_{M_b}} \in CA$ és $\mu \in Is(\mathfrak{Fr}_{P_t}, \mathfrak{Fr}_{P_b})$

$D_t \subseteq \equiv_\mu$

mivel $z \neq j$-re $\exists_z p_i v_j \equiv_\mu p_i v_j$, és $z \neq ij$-re $\exists_z q v_i v_j \equiv_\mu q v_i v_j$

mert $z \neq j$-re $\exists_z p_i v_j \equiv_{M_b} p_i v_j$, és $z \neq ij$-re $\exists_z q_i v_j \equiv_{M_b} q_i v_j$,

$\equiv_{M_b} = Cr^{(D_b \cup H_b)} CA$ miatt.

2./ $\quad G^{(H_t)} CA \not\subseteq \equiv_\mu$

mivel

$$\langle =_{01} \wedge q v_0 v_2 \, , \; =_{01} \wedge q v_1 v_2 \rangle \in G^{(H_t)} CA \setminus \equiv_\mu \, ,$$

$$=_{01} \wedge q v_0 v_2 \;\not\equiv_\mu\; =_{01} \wedge q v_1 v_2 \quad \text{miatt.}$$

Ad B./

A bizonyitás teljesen hasonló az a./ pontéhoz, a lényeges eltérések:

$$H_t \subseteq \equiv_S$$

mivel $=_{jz} \wedge p v_i v_j \;\equiv_{M_d}\; =_{jz} \wedge p v_i v_z$ és

$=_{iz} \wedge q v_i v_j \;\equiv_{M_d}\; =_{iz} \wedge q v_z v_j$ és

$=_{jz} \wedge q v_i v_j \;\equiv_{M_d}\; =_{jz} \wedge q v_i v_z$.

$$G^{(D_t)} CA \not\subseteq \equiv_S \, ,$$

mivel $\langle \exists_1 p_1 v_2 \, , \; p_1 v_2 \rangle \in G^{(D_t)} CA \setminus \equiv_S$.

Az állítást ezzel bizonyitottuk.

Evvel befejeztük III4.1T. a./ bizonyitását.

Ad b./

Van olyan $\langle g, \mathfrak{A} \rangle$ pár, hogy $\mathfrak{A} \in CA$, de $\mathfrak{A} \not\models_g t$.

$\square$

Azt, hogy melyik tipusra hogyan viselkednek a fenti állitások, a következőkben pontosan megvizsgáljuk. Nyilván az alábbi tételeknek következménye lesz III4.1T. Azért mondtuk ezt mégis ki előre, mert egyrészt bizonyitása szemléletesebb a most következőknél, másrészt az előző fejezetek szempontjából ez a tétel a fontos és a következők csak érdekességek.

<u>III4.2T</u>

Tétel:

1./ Ha $t = 0$, akkor az előző ábra összes kongruenciája egybeesik,

azaz

1a./

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Gr^{(D_t)}CA \arrow[dl, phantom, sloped, "="] \arrow[dr, phantom, sloped, "="] & \\
Gr_{P_t}CA & \| & Gr^{(D_t \cup H_t)}CA \\
& Gr^{(H_t)}CA \arrow[ul, phantom, sloped, "="] \arrow[ur, phantom, sloped, "="] &
\end{tikzcd}$$

és

1b./ $$Gr_I CA = Gr^{(t)} CA$$

2./ Ha viszont $t \neq 0$, akkor mind különbözőek,

vagyis

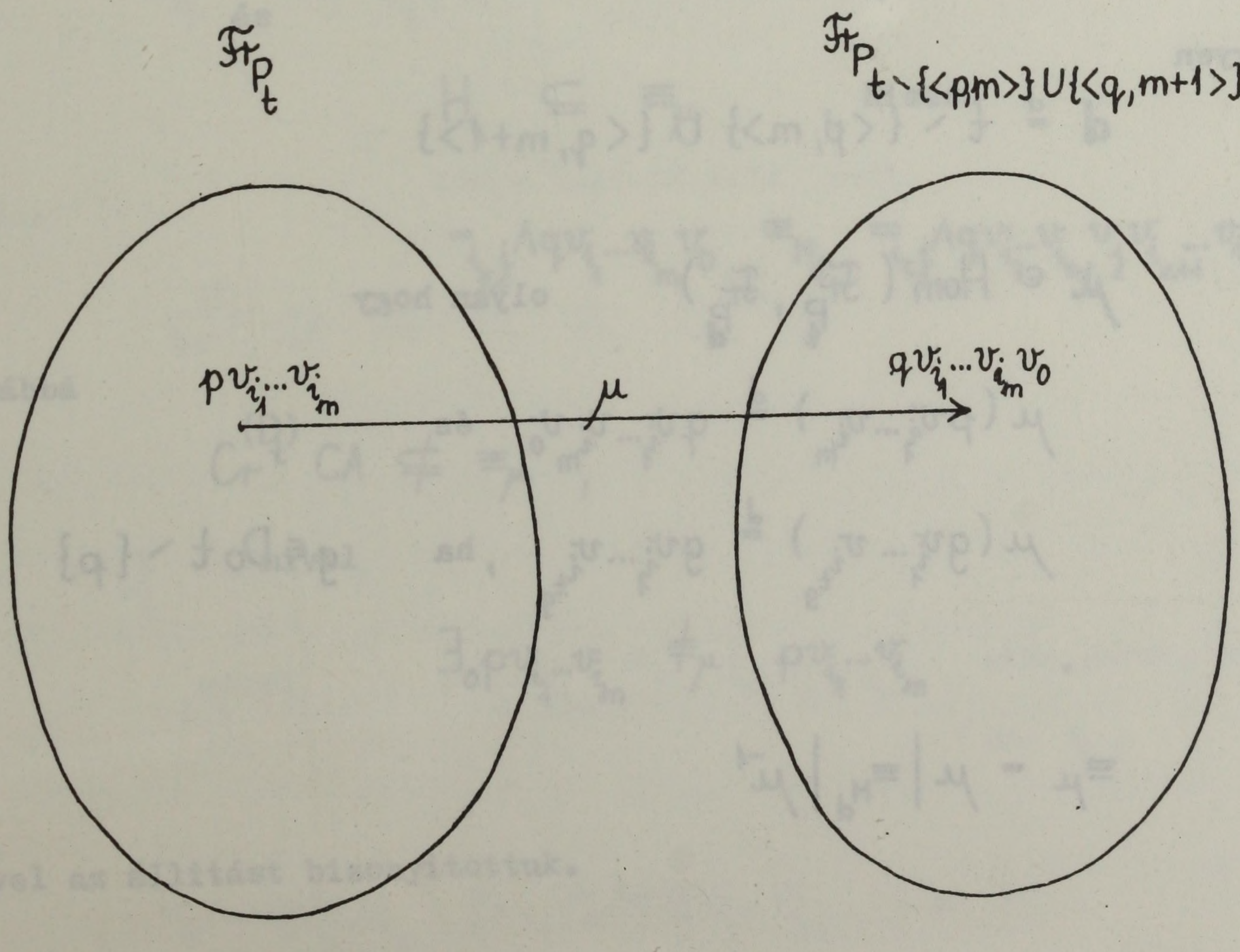
2a./

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Gr^{(D_t)}CA \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \\
Gr_{P_t}CA \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & \nparallel \; \nparallel & Gr^{(D_t \cup H_t)}CA \\
& Gr^{(H_t)}CA \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

és

2b./ $$Gr_I CA \subset Gr^{(t)} CA$$

Bizonyitás:



Ábra III4.2T.2a./ - hoz

Ad 1./

$t = 0$ esetén $I = P_t = D_t = H_t = 0$, igy $Cr_0 CA = Cr_0^{(0)} CA$ -ból következik az állitás, mely nem értelmetlen, hiszen $\mathfrak{F}_0$ a $\{ =_{ij} : i,j \in \omega \}$ konstansok által generált szóalgebra (azaz létezik, nevezetesen egy megszámlálható halmaz).

Ad 2a./

A bizonyitás fő gondolatmenete ugyanaz, mint III4.1T-é, ezért itt csak a lényeges pontokat irjuk le.

$$t \neq 0 \implies (\overset{d}{\exists} p,m)\, \langle p,m \rangle \in t \; .$$

Tegyük fel, hogy $q \notin Do\, t$.

Legyen

$$d \overset{d}{=} t \setminus \{\langle p,m \rangle\} \cup \{\langle q, m+1 \rangle\}$$

és

$\mu \in Hom(\mathfrak{F}_{P_t}, \mathfrak{F}_{P_d})$ olyan hogy

$$\mu(p v_{i_1} \dots v_{i_m}) \overset{d}{=} q v_{i_1} \dots v_{i_m} v_0$$ és

$$\mu(g v_{i_1} \dots v_{i_{t_g}}) \overset{d}{=} g v_{i_1} \dots v_{i_{t_g}}$$, ha $g \in Do\, t \setminus \{p\}$.

$$\equiv_\mu = \mu \,|\, \equiv_{M_d} |\, \mu^{-1}$$

Állitás:

$$Cr^{(H_t)}CA \subseteq \equiv_\mu \not\supseteq Cr^{(D_t)}CA$$

Mert:

$$Cr^{(H_t)}CA \subseteq \equiv_\mu ,$$

mivel

$$\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv_\mu} \in \mathbf{IS}\, CA \quad , \text{hiszen}$$

$$\mathfrak{Fr}_{P_t}/_{\equiv_\mu} \cong | \subseteq \mathfrak{Fr}_{P_d}/_{\equiv_{M_d}} \in CA$$

és

$$H_t \subseteq \equiv_\mu \quad , \text{hiszen}$$

$$=_{i_x j} \wedge q v_{i_1} \dots v_{i_m} v_0 \equiv_{M_d} =_{i_x j} \wedge q v_{i_1} \dots v_{i_{x-1}} v_j v_{i_{x+1}} \dots v_{i_m} v_0 \ .$$

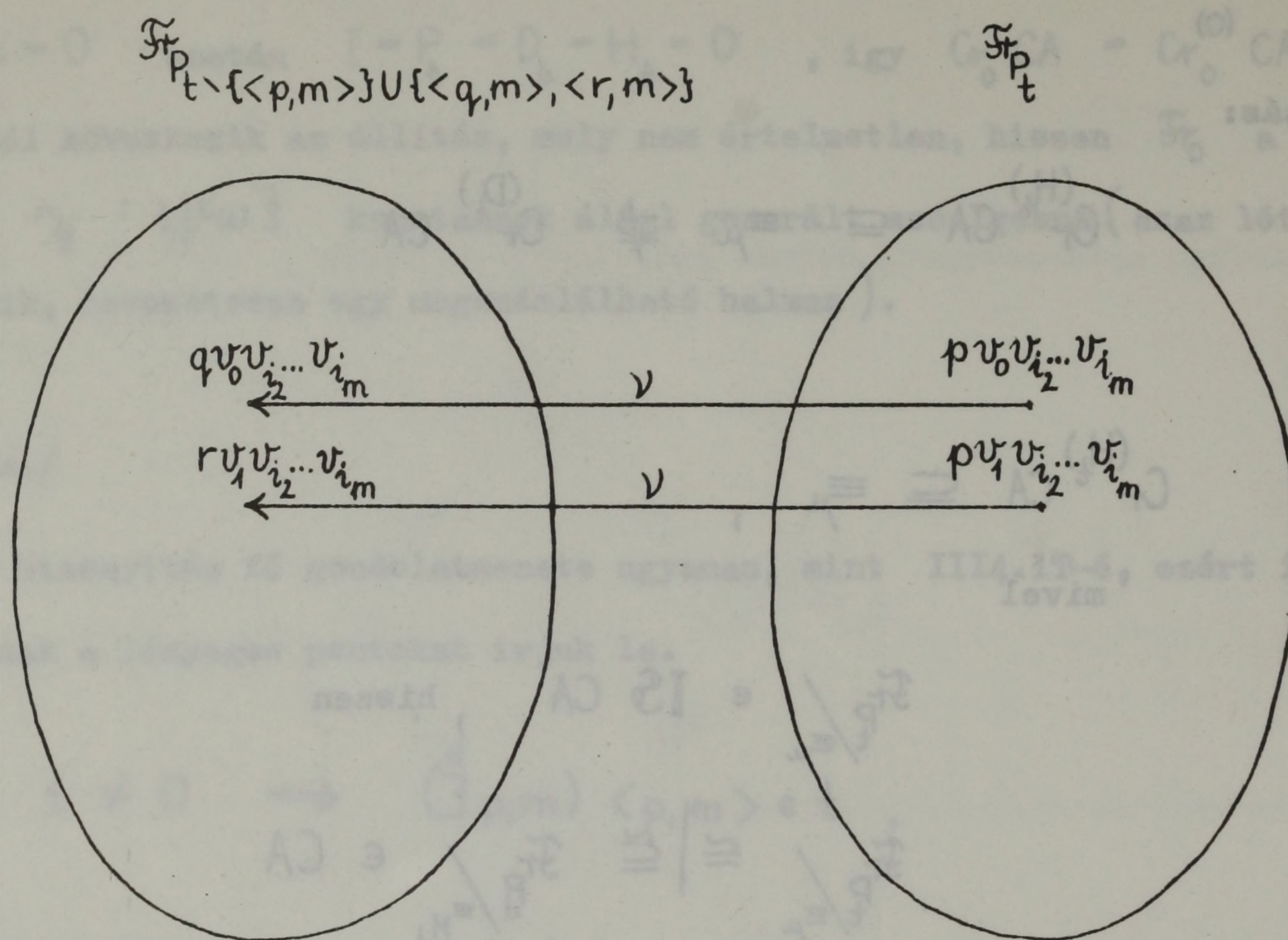
Továbbá

$$Cr^{(D_t)}CA \not\subseteq \equiv_\mu ,$$

mivel

$$\exists_0 p v_{i_1} \dots v_{i_m} \not\equiv_\mu p v_{i_1} \dots v_{i_m} \ .$$

Evvel az állitást bizonyitottuk.



Ábra III4.2T.2a./ - hoz

Tegyük fel most, hogy $q, r \notin D_0 t$.

Legyen

$$\mathfrak{b} \stackrel{d}{=} t \setminus \{\langle p,m\rangle\} \cup \{\langle q,m\rangle, \langle r,m\rangle\}$$

és

$$\nu \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}r_{\mathfrak{P}_t}, \mathfrak{F}r_{\mathfrak{P}_{\mathfrak{b}}}) \quad \text{olyan hogy}$$

$$\nu(pv_{i_1}\ldots v_{i_m}) \stackrel{d}{=} \begin{cases} qv_{i_1}\ldots v_{i_m} & \text{, ha } i_1 \text{ páros} \\ rv_{i_1}\ldots v_{i_m} & \text{, ha } i_1 \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\nu(gv_{i_1}\ldots v_{i_{t_g}}) \stackrel{d}{=} gv_{i_1}\ldots v_{i_{t_g}} \quad \text{, ha } g \in D_0 t \setminus \{p\}.$$

$$\equiv_\nu \stackrel{d}{=} \nu \,|\, \equiv_{M_b} |\, \nu^{-1}$$

Állitás:

$$Cr^{(D_t)} CA \subseteq \equiv_\nu \not\supseteq Cr^{(H_t)} CA$$

Mert:

$$D_t \subseteq \equiv_\nu ,$$

mivel $pv_{i_1}\ldots v_{i_m} \equiv_\nu \exists_z pv_{i_1}\ldots v_{i_m}$, akár páros, akár páratlan az i_1,

de

$$=_{\alpha} \wedge pv_0 v_{i_2}\ldots v_{i_m} \not\equiv_\nu =_{\alpha} \wedge pv_1 v_{i_2}\ldots v_{i_m} .$$

Evvel az állitást bizonyitottuk.

Ezzel befejeztük a III4.2T.2a./ bizonyitását.

Ad 2b./

Algebrai bizonyitás:

$\mathfrak{Fr}_I$ CA nem lokálisan véges, mig $\mathfrak{Fr}^{(t)}$ CA lokálisan véges.

Logikai bizonyitás:

A 2a./ bizonyitásával teljesen analóg: (de egyszerübben le lehetne irni) A lényeges eltérések:

$$\mu(p) = q \quad \text{és} \quad \exists_n p \not\equiv_\mu p$$

□

III4.1M
Megjegyzés:

A következő tétel kimondja, hogy a definiáló relációkat az $\equiv_{M_t}$ algebrai megadásánál nem lehet kiküszöbölni (axiomákkal helyettesiteni). Természetesen ez csak addig igaz, amig ragaszkodunk az t tipushoz: ha pl. az $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ algebrát reduktumként beágyazzuk egy olyan algebrába, melyben P_t elemei konstansok (megkülönböztetett elemek) akkor $\equiv_{M_t}$ egyenletrendszerrel axiomatizálható, és igy nem kell definiálórelációkat használni.

□

III4.3T

Tétel:

Nincs olyan (ℓ-tipusu) K algebraosztály, melyre

a./ $$Cr_{P_t} K = \equiv$$, vagy melyre

b./ $$Cr_I K = \dot{\equiv}$$.

Bizonyitás:

Ad a./

Legyen $$t \stackrel{d}{=} \{\langle p,1\rangle\}$$

és

$$\mu \in Is(\mathfrak{Fr}_{P_t}, \mathfrak{Fr}_{P_t})$$ olyan hogy

$$\mu(pv_0) \stackrel{d}{=} pv_1 ,$$

$$\mu(pv_1) \stackrel{d}{=} pv_0 ,$$ és

$$\mu(pv_i) \stackrel{d}{=} pv_i ,$$ ha $i \in \omega \setminus 2$

$$\equiv_\mu \stackrel{d}{=} \mu \,|\, \equiv_{M_t} \,|\, \mu^{-1}$$

$$\mathcal{R}_J^{(S)} \overset{d}{=} \{ R : \mathfrak{F}_J/_R \in \mathbf{SP}K ,\ S \subseteq R \} \qquad (\text{III.1Tb})$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \equiv = \mathcal{C}_{P_t}^{(S)}K \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv} \cong \mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv_\mu} \arrow[d, Rightarrow] & & S \subseteq \equiv_\mu \arrow[dll, Rightarrow] \\
\equiv = \bigcap \mathcal{R}_{P_t}^{(S)} \arrow[ddrr, Rightarrow] & & \equiv \in \mathcal{R}_{P_t}^{(S)} \arrow[dr, Rightarrow] & & \equiv \in \mathcal{R}_{P_t}^{(S)} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & & \equiv_\mu \in \mathcal{R}_{P_t}^{(S)} \\
 & & & \equiv_\mu \in \mathcal{R}_{P_t}^{(S)} \arrow[dl, Rightarrow] & & & \\
 & & \equiv_\mu \supseteq \equiv \arrow[drr, Rightarrow] & & & & \equiv_\mu \not\supseteq \equiv \arrow[dll, Rightarrow] \\
 & & & & \text{ELLENTMONDÁS} & &
\end{tikzcd}$$

Ábra:

1./ III4.3Ta./ -hoz: $S := 0$;

2./ III4.2M. -hez: $S := 0$; $\equiv := \mathcal{C}^{(D_t)}CA$; $\equiv_\mu := \mu \left| \mathcal{C}^{(D_t)}CA \right| \mu^{-1}$

és ugyanez D helyett mindenütt H -val

3./ III4.3Tb./ -hez: $S := 0$; $\equiv := \doteq$; $\equiv_\mu := \nu \left| \doteq \right| \nu^{-1}$

ahol pl. $S := 0$ azt jelenti, hogy S helyébe 0-t kell irni.

Az ábra azt szemlélteti, hogy $\mathfrak{F}_J^{(S)}K$ önmaga fölött is szabad.

Látszik, hogy

$$\mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv_\mu} \cong \mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv}$$

és ugyanakkor

$$\equiv_\mu \not\supseteq \equiv \quad , \text{ hiszen } \quad \exists_1 p v_0 \not\equiv_\mu p v_0 \ .$$

Tehát $\equiv$ nemcsak hogy nem jellemezhető egyenletekkel, de még csak nem is axiomatizálható,

hiszen

tudjuk (ill.o.4.36-ból közvetlenül látható), hogy $Cr_{P_t} K$ a legkisebb olyan kongruencia $\mathfrak{F}_{P_t}$ -n, mely még teljesiti a K -n érvényes egyenleteket (azaz, az $\{ R : \mathfrak{F}_{P_t}/_R \in \mathbf{HISP} K \}$ halmaz legkisebb eleme).

A fenti izomorfia miatt azonban $\mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv_\mu}$ teljesiti az összes $\mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv}$ -ra érvényes egyenleteket, és igy $\equiv = Cr_{P_t} K$ -ból $\equiv_\mu \supseteq \equiv$ következne.

III4.2M

Megjegyzés:

Megjegyezzük, hogy a fentiekből az is következik, hogy nincs olyan K,

melyre $\mathrm{Cr}^{(D_t)}\,\mathrm{CA} = \mathrm{Cr}_{P_t}\,K$, vagy $\mathrm{Cr}^{(H_t)}\,\mathrm{CA} = \mathrm{Cr}_{P_t}\,K$,

hiszen $\equiv_{02} \wedge p v_0 \not\equiv_{\mu} \equiv_{02} \wedge p v_2$.

□

Ad b./

Algebrai bizonyitás:

Minden olyan cilindrikus algebrának, melynek van nem-zéródimenziós eleme, van olyan direkthatványa, mely nem lokálisan véges. (1.6.11.)
Igy $\mathfrak{Fr}_I\,\mathrm{CA} \notin \mathrm{Lf}$, mig $\mathfrak{Fr}^{(t)}\,\mathrm{CA} \in \mathrm{Lf}$.

Logikai bizonyitás:

Legyen $t \overset{d}{=} \{ \langle p,1 \rangle, \langle q,2 \rangle \}$

és

$$\nu \in \mathrm{Is}\,(\mathfrak{Fr}_I , \mathfrak{Fr}_I) \quad \text{olyan hogy}$$

$$\nu(p) \overset{d}{=} q \quad \text{és}$$

$$\nu(q) \overset{d}{=} p$$

Ekkor

$$\exists_1 p \not\equiv_{\nu} p \quad , \text{ és lásd az ábrát.}$$

□

III4.3M

Megjegyzés:

III4.3T bizonyitása alapján ismét könnyen belátható e tétel pontositása:

$$t = 0 \iff (\exists K)\, \mathfrak{G}_{P_t} K = \equiv_{M_t}$$

$\square$

IV.

Tipusfüggetlen elsőrendü logika

TARTALOM

IV.1D: A tipusfüggetlen logika $\langle \mathfrak{F}_I, k \rangle$, ahol

$$M^I \overset{d}{=} \bigcup_{t \in {}^I\omega} M_t$$

$$k \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_I, \underset{\mathfrak{A} \in M^I}{\mathbb{P}} \mathfrak{L}_A), \quad k(q)_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \{ s \in {}^\omega A : (\exists n \in \omega)\, n \upharpoonright s \in \mathfrak{A}_q \}$$

IV.1T: $\langle \mathfrak{F}_I, k^{M_t} \rangle = \langle \mathfrak{F}_I, k \rangle$

IV.1M: A t-tipusu logika visszavezethetősége a tipusfüggetlen logikára.

IV.2D:
$$VR^{(A)} B \overset{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{, ha } B = 0 \\ A & \text{, ha } B = {}^\omega A \\ \{ (\bigcup \Delta^{(\mathfrak{L}_A)} B) \upharpoonright s : s \in B \} & \text{, egyébként} \end{cases}$$

IV.3D: $N^I \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in M^I : (\forall q \in I)\, \mathfrak{A}_q = VR^{(A)} k(q)_{\mathfrak{A}} \}$

IV.1L: $(\forall \mathfrak{A} \in M^I)(\exists! \mathfrak{B} \in N^I)\ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ k$

IV.2T: $(k^{N^I})^\circ = k^\circ$

IV.3T: $k^{N^I} = p_I \mathfrak{L}$

IV.4D: $\approx \overset{d}{=} k^\circ$

IV.3TK: $\approx = Cr_I \mathfrak{L} = Cr_I Lf = Cr_I \mathcal{H}a = \mathbf{Cr_I Re} \neq Cr_I CA$

IV.2M: $\langle \mathfrak{F}_I, k \rangle$-hoz nehezebb kezelhető kalkulust találni.

IV.3M: A tipusfüggetlen logika algebrai szerkezetének összehasonlitása a t-tipusu változójelmentes logikáéval.

IV.4M: A tipusfüggetlen logikából kiindulva hogyan lehet eljutni a függvényjeles logikáig (röviditések és elméletek bevezetésével).

IV. Tipusfüggetlen elsőrendü logika

Ebben a fejezetben megadunk egy olyan logikát, melynek modellosztálya tartalmazza M_t-t, és melyet megszoritva M_t-re, a t-tipusu logikával ekvivalens logikát kapunk.

Algebrai szempontból a tipusfüggetlen logika felépitése egyszerübb lesz (definiáló relációkra nem lesz szükség), kifejezőereje viszont ugyanakkora marad, mint az $\mathfrak{F}_{P_t}$ logikáé.

Várhatóan tehát, a tipusfüggetlen logika alkalmas lesz arra, hogy segitségével bizonyos dolgokat egyszerübben lássunk be a t-tipusu logikáról. A kapcsolat azonban a két logika között nem olyan erős, mint a függvényjeles és függvényjelmentes között, hanem olyan, mint az egyenlőségjeles és egyenlőségjelmentes logika között: Az M_t halmaz nem axiomatizálható a tipusfüggetlen logikában, hanem csak egy nála nagyobb, melynek azonban minden eleméhez van az M_t-ből egy olyan elem, hogy igazságértékalgebrájuk (és a hozzátartozó $\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k$ függvény) azonos.

IV.1D

Definició:

$$\mathbf{M}^I \stackrel{d}{=} \bigcup_{t \in I_\omega} M_t$$

Legyen $q \in I$, és $\mathfrak{A} \in M^I$

Ekkor

$$\mathcal{k} \in \mathrm{Hom}\,(\mathcal{F}_I\,,\ \mathbb{P}_{\mathfrak{A} \in M^I} \mathcal{L}_A) \quad \text{olyan hogy}^{*/}$$

$$k(q)_{\mathfrak{A}} \stackrel{d}{=} \{\, s \in {}^{\omega}A : (\exists n \in \omega)\, n \upharpoonright s \in \mathfrak{A}_q \,\},$$

azaz

$$k(q)_{\mathfrak{A}} \stackrel{d}{=} \{\, s \in {}^{\omega}A : \mathrm{Sb}\, s \mathbin{\Delta} \mathfrak{A}_q \,\}$$

Az $\langle \mathcal{F}_I , k \rangle$ logikát nevezzük tipusfüggetlen logikának.

□

---

*/ A $\mathcal{k}$, k és k jeleket különböző betükként használjuk.

IV.1T

Tétel:

$$\langle \mathfrak{F}_I , k^{M_t} \rangle = \langle \mathfrak{F}_I , k \rangle$$

Bizonyitás:

Mindkét függvény homomorfizmus $\mathfrak{F}_I$ -ből $\mathop{\mathbb{P}}_{\mathfrak{A}\in M_t} \mathcal{L}_A$ -ba, és az I halmazon megegyeznek.

Részletesebben:

$k^{M_t}, k \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_I, \mathop{\mathbb{P}}_{\mathfrak{A}\in M_t} \mathcal{L}_A)$, olyan hogy $q \in I$ és $\mathfrak{A} \in M_t$-re

$$k^{M_t}(q)_{\mathfrak{A}} = \{ s \in {}^{\omega}A : (\exists n)\ n \mid s \in \mathfrak{A}_q \} \overset{\mathfrak{A}\in M_t}{=}$$

$$= \{ s \in {}^{\omega}A : t_q \mid s \in \mathfrak{A}_q \} =$$

$$= k(q)_{\mathfrak{A}}$$

□

IV.1M

Megjegyzés:

IV.1T szerint a tipusfüggetlen logika kifejezőereje pontosan megegyezik a t-tipusu logika kifejezőerejével, a t-tipusu logika modellosztályában.

Felmerül tehát a kérdés, hogy mennyiben vezethető vissza a t-tipusu logika a tipusfüggetlen logikára.

Legyen

$$\Sigma_t \stackrel{d}{=} \{ \exists_i q \leftrightarrow q \ : \ q \in I, t_q \leq i \}$$

$$M'_t \stackrel{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in M^I \ : \ \mathfrak{A} \models \Sigma_t \}$$

Vizsgáljuk az $\langle \mathfrak{F}_I, k^{M'_t} \rangle$ logikát! Könnyen látható, hogy ezen logika tautológikus formulaalgebrája identikus a t-tipusu logika ($\langle \mathfrak{F}_I, k \rangle$) tautologikus formulaalgebrájával. Tehát szintaktikailag teljesen azonos a két logika. Szemantikai szempontból viszont igaz, hogy

$$(\forall \mathfrak{B} \in M'_t)(\exists \mathfrak{A} \in M_t) \ \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ k = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k \quad .$$

Ez valamivel erősebb kapcsolatot jelent, mint amilyen az egyenlőséges és egyenlőségmentes logika között van, hiszen ott csak $(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k)^{\circ}$ -ról mondható ki a fenti összefüggés.

□

M^I -ben azok lesznek a lényeges modellek, melyekben minden reláció "valódi", azaz nem fölöslegesen sok argumentumu.

<u>IV.2D</u>

Definició:

A könnyebb beszéd érdekében bevezetjük a következő függvényt, mely valamely $B \subseteq {}^{\omega}A$ -hoz hozzárendeli azt a "valódi" relációt, melynek igazságértéke ($\mathfrak{k}$ vagy k szerint) B.

Legyen $B \subseteq {}^{\omega}A$.

$$\mathbf{VR}^{(\mathbf{A})} B \stackrel{d}{=} \begin{cases} 0 & , \text{ ha } B = 0 \\ A & , \text{ ha } B = {}^{\omega}A \\ \{ (\bigcup \Delta^{(\mathcal{L}_A)} B) \restriction s : s \in B \} & , \text{ egyébként} \end{cases}$$

$\square$

IV.3D

Definició:

Kiválasztjuk M^I-ből a lényeges, vagy valódi modelleket:

$$N^I \stackrel{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in M^I : (\forall q \in I)\ \mathfrak{A}_q = VR^{(A)} k(q)_{\mathfrak{A}} \}$$

$\square$

IV.1L

Lemma:

$$(\forall \mathfrak{A} \in M^I)(\exists! \mathfrak{B} \in N^I)\ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ k$$

Bizonyitás:

Mivel

$k(q)_{\mathfrak{A}} = k(q)_{\mathfrak{B}}$ & $\mathfrak{B} \in N^I$ -ből következik, hogy $A = B$ és

$$\mathfrak{B}_q = VR^{(A)} k(q)_{\mathfrak{A}},$$

minden $\mathfrak{A} \in M^I$ modell egyértelmüen meghatároz egy $\mathfrak{B} \in N^I$ modellt, melyre

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ k$$

$\square$

IV.2T

Tétel:

$$k^{\circ} = (k^{N^I})^{\circ}$$

Bizonyitás:

$$k(\varphi) = k(\psi)$$ csakkor, ha

$$(\forall \mathfrak{A} \in M^I)\ k(\varphi)_{\mathfrak{A}} = k(\psi)_{\mathfrak{A}}$$ IV.1L miatt csakkor, ha

$$(\forall \mathfrak{A} \in N^I)\ k(\varphi)_{\mathfrak{A}} = k(\psi)_{\mathfrak{A}}$$ csakkor, ha

$$k^{N^I}(\varphi) = k^{N^I}(\psi)$$

□

IV.3T

Tétel:

$$k^{N^I} = p_I\, \mathcal{L}\mathfrak{v}$$

Bizonyitás:

A bizonyitás ismét teljesen analóg III3.1T és III2.1T -vel, igy csak vázlatosan irjuk le:

$\Gamma_I \mathcal{L}$ és N^I most is azonositható ugy, hogy ha g és $\mathfrak{A}$ egymásnak megfeleltetett. elemek, akkor $g = \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k$.

Ennélfogva

$$k^{N^I} = \langle \langle k(x)_{\mathfrak{A}} \rangle_{\mathfrak{A} \in N^I} \rangle_{x \in F_I} =$$

$$= \langle \langle gx \rangle_{g \in \Gamma_I \mathcal{L}} \rangle_{x \in F_I} =$$

$$= p_I \mathcal{L}$$

□

IV.4D

Definició:

Jelöljük a tipusfüggetlen logika szemantikus ekvivalenciáját $\approx$-val, azaz

$$\approx \stackrel{d}{=} k^{\circ}$$

□

IV.3TK

Következmény:

$$\approx\; = \mathrm{Cr}_I\, \mathit{Lv} = \mathrm{Cr}_I\, \mathit{Lf} = \mathrm{Cr}_I\, \mathfrak{Re} \neq \mathrm{Cr}_I\, \mathrm{CA}$$

Bizonyitás:

$$\approx\; \overset{\approx\text{ def.}}{=}\; k^{\circ} \;\overset{\text{IV.2T}}{=}\; \left(k^{N^I}\right)^{\circ} \;\overset{\text{IV.3T}}{=}\; \left(P_I\, \mathit{Lv}\right)^{\circ} \;\overset{\text{algebrai tétel: III.2T}}{=}\; \mathrm{Cr}_I\, \mathit{Lv}\;,$$

és tovább

$$\mathrm{HSP}\, \mathit{Lv} \;\overset{\text{114.1T, 115.1TK}}{=}\; \mathrm{HSP}\, \mathit{Lf} \;\overset{\text{[Henkin-Tarski 61]}}{=}\; \mathrm{HSP}\, \mathcal{H}a = \mathfrak{Re} \;\overset{\text{a könyv, 17 old}}{\neq}\; \mathrm{HSP}\, \mathrm{CA}$$

$\square$

Tehát a tipusfüggetlen logika tautológikus formulaalgebrája éppen a szabad reprezentálható cilindrikus algebra.

IV.2M
Megjegyzés:

Az $\langle \mathfrak{Fr}_I, k^{M_t} \rangle$ logika tautológiáihoz igen könnyü kezelhető kalkulust találni. (Egyszerübb kalkulus található, mint $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ -hez.)

Például ugy, hogy $\mathfrak{Fr}_{I/\triangleq} = \mathfrak{C}^{(t)}CA$ miatt axiómákként megadjuk a cilindrikus egyenleteket és a t dimenziókorlátozást.

Ugy tünik, hogy $\langle \mathfrak{Fr}_I, k \rangle$ -hoz nehezebb különösen egyszerü és könnyen megadható kalkulust találni. Ezt támasztja alá az a tény, hogy a tautologikus formulaalgebra $\mathfrak{Fr}_I$ $\mathfrak{Re}$, viszont a $\mathfrak{Re}$ varietáshoz egyszerüen megadható egyenletrendszert (pl. amilyen CA -hoz van) mindezideig - ugy tudjuk - nem sikerült találni.

Mindazonáltal $\langle \mathfrak{Fr}_I, k \rangle$ -ra is adható effektiv módon (teljes) kalkulus, hiszen $\mathfrak{Re}$ -re ismert effektiven megadott egyenletrendszer, mely varietásként definiálja. (Lásd a könyvben, 18 old.)

$\square$

IV.3M
Megjegyzés:

A tipusfüggetlen logika algebrai tulajdonságait összefoglalva:

A tipusfüggetlen $\langle \mathfrak{Fr}_I, k^{NI} \rangle$ logika nem más, mint az $\langle \mathfrak{Fr}_I, p_I \mathfrak{Lr} \rangle$ pár, tehát egy tisztán algebrai konstrukció, mely annyival egyszerübb a t-tipusu $\langle \mathfrak{Fr}_I, p^{(t)}\mathcal{W} \rangle$ logikánál, hogy nincs benne dimenziókorlátozás, viszont annyival bonyolultabb, hogy szükség volt N^I bevezetésére.

A tautologikus formulaalgebra $\mathfrak{Fr}_I \mathfrak{Lf} = \mathfrak{Fr}_I \mathfrak{Re}$, mely annyival egyszerübb a t-tipusu $\mathfrak{Fr}^{(t)} CA$ -nál (hogy nincs dimenziókorlátozás, viszont annyivel bonyolultabb, hogy $\mathfrak{Lf}$ nem varietás, $\mathfrak{Re}$ pedig varietás ugyan, de nehezebben kezelhető, mint CA.

Érdekes még, hogy a tipusfüggetlen formulaalgebrák izomorf képei éppen a reprezentálható cilindrikus algebrák. (Ennek felelt meg a t-tipusu logikánál az az összefüggés, hogy $\mathfrak{S} = \mathfrak{Lf}$.)

□

IV.4M

Megjegyzés:

A tipusfüggetlen logikából kiindulva a következő uton jutunk el a függvényjeles logikáig:

1./ Létrehozzuk az $\langle \mathfrak{Fr}_I, k \rangle$ logikát.

2./ A modellosztályt leszükitve az axiomatizálható M'_t osztályra, kapjuk az $\langle \mathfrak{Fr}_I, k^{M'_t} \rangle$ logikát.

3./ Ennek szerkezetét kihasználva $\mathfrak{Fr}_I$ elemeire egyszerüsitő jelöléseket vezetünk be és igy kapjuk az $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t}, k^{M'_t} \rangle$ logikát.

4./ A modellosztályt leszükitve az M_t halmazra, (mely ugyan nem axiomatizálható, de mint láttuk egyenértékü M_t' -vel) kapjuk a szokásos $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ t-tipusu logikát.

5./ Legyen $K \subseteq I$; a modellosztályt leszükitve azokra a modellekre, melyeken K elemeinek függvények felelnek meg (M_{K_t}) kapjuk az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k^{M_{K_t}} \rangle$ logikát.

6./ Ennek szerkezetét kihasználó röviditéseket bevezetve kapjuk a függvényjeles $\langle \mathfrak{F}_{P_{K_t}}, k^{M_{K_t}} \rangle$ logikát.

Megjegyezzük még, hogy hasonló ut járható be az egyenlőségmentes (t-tipusu) logikából kiindulva:

1./ Egyenlőségmentes logika

2./ Azon modellek kiválasztása, melyeken az egyenlőségjelnek univerzális kongruencia felel meg (ez axiomatizálható).

3./ Ezt kihasználjuk.

4./ Kiválasztva azon modelleket, melyeken az egyenlőségjelnek az Id reláció felel meg, kapjuk $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ -t.

Stb.

$\square$

F Ü G G E L É K

T A R T A L O M

HALMAZELMÉLETI FÜGGELÉK

T A R T A L O M

HF.L1: $X \in U \iff \bigcup X \in U$

HF.L2: $X \in U \iff (\forall Y \subseteq X)\, Y \in U$

HF.L3: $X, Y \in U \iff X \times Y \in U$

HF.L4: $\mathfrak{A} \in U \iff \mathfrak{A}_0, \mathrm{Do}\,\mathfrak{A} \in U$

HF.L5: $\mathrm{Dot} \in U \iff \mathfrak{F}t_{\mathfrak{R}_t} \in U$

HF.L6: $\mathfrak{A} \in U \longleftrightarrow \mathfrak{A}/_{\equiv} \in U$

HF.L7: $\mathfrak{A} \in U \iff \mathrm{Co}\,\mathfrak{A}, \{\mathfrak{A}/_r : r \in \mathrm{Co}\,\mathfrak{A}\} \in U$

HF.L8: $\mathfrak{A} \in U \iff \mathrm{Do}\,\mathfrak{A}, {}_{\mathfrak{A}}\hat{\Omega} \in U$

$\mathcal{L}_A \in U \iff {}_{\mathfrak{A}}\hat{\Omega} \in U$

<u>Kiegészitések:</u>

az elsőrendü predikátumkalkulus definiciójához

II2.2T-hez

II2.3T-hez

II4.1T-hez

II5.1T-hez

III.1.fejezethez

III2.2L-hez

III2.2LK-hoz

Halmazelméleti függelék.

Ahhoz, hogy a dolgozatban elmondottak igazak legyenek, ki kell még kötnünk, hogy $\omega \in \mathcal{U}$ legyen. Ez ekvivalens azzal a kikötéssel, hogy $\mathcal{U}$ -nak legyenek végtelen elemei. Feltehetjük, hogy ℓ , ϑ ,... stb. elemei $\mathcal{U}$ -nak, hiszen ℓ , ϑ ,... stb. szerepét betöltő konstrukciók mostmár ω -ból felépithetők $\mathcal{U}$ -n belül.

A következőkben kimondunk néhány lemmát, melyek segitségével a tanulmányban szereplő tételekről elég könnyü belátni, hogy összeegyeztethetők a bevezetésben közölt halmazelméleti felfogással. A bizonyitások nagyon vázlatosak. A tételek nagyrészét csak egyik irányban bizonyitjuk, mert a másik irányban könnyen látható. Mivel a bizonyitásból ugyis kiderül, nem mondjuk meg minden alkalommal, hogy melyik irányban bizonyitjuk a tételt.

HF.L1
Lemma: $X \in \mathcal{U} \iff \bigcup X \in \mathcal{U}$

□

HF.L2
Lemma: $X \in \mathcal{U} \iff (\forall Y \subseteq X)\, Y \in \mathcal{U}$

□

HF.L3

Lemma: $X, Y \in \mathcal{U} \iff X \times Y \in \mathcal{U}$

Bizonyitás:

Legyen $X, Y \in \mathcal{U}$, ekkor $X \times Y \subseteq \mathcal{U}$.

A bizonyitás az

$$X \times Y = \bigcup_{a \in Y} X \times \{a\}$$ összefüggésen alapszik.

Minden $a \in Y$-hoz van $f_a : X \twoheadrightarrow X \times \{a\}$, tehát $X \times \{a\} \in \mathcal{U}$, */

és van $g : Y \twoheadrightarrow \{X \times \{a\} : a \in Y\}$,

emiatt $\bigcup \{X \times \{a\} : a \in Y\} = X \times Y \in \mathcal{U}$

□

HF.L4

Lemma: Tetszőleges $\mathfrak{A}$ strukturára $\mathfrak{A} \in \mathcal{U} \iff \mathfrak{A}_0, Do\,\mathfrak{A} \in \mathcal{U}$

Bizonyitás:

$\mathfrak{A}_0 \in \mathcal{U}$-ból HF.L3 segítségével adódik, hogy $Rg\,\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{U}$,

és mivel $Do\,\mathfrak{A} \in \mathcal{U}$ is igaz, $\mathfrak{A} \in \mathcal{U}$.

□

HF.L5

Lemma: $Do\,t \in \mathcal{U} \iff \mathfrak{F}_{P_t} \in \mathcal{U}$

Bizonyitás:

---

*/

$\twoheadrightarrow$ a ráképzés jele.

Kikötöttük, hogy $\ell, v \in U$, így $H \stackrel{d}{=} Rg\,v \cup Do\,t \cup Do\,\ell \in U$.

$G \stackrel{d}{=} \bigcup_{i\in\omega} {}^{i}H \in U$, mert $\omega \in U$.

$\mathfrak{Fr}_{P_t} \subseteq G$, tehát $\mathfrak{Fr}_{P_t} \in U$.

Most HF.L4 és $\ell \in U$ miatt $\mathfrak{Fr}_{P_t} \in U$.

Megjegyezzük, hogy e bizonyitás során ugy tettünk, mintha a $^{\times}$ müvelet asszociativ lenne. A preciz bizonyitás szellemében megegyezik a fentivel, csak valamivel bonyolultabb.

□

HF.L6

Lemma: $A \in U \Leftrightarrow A/_{\equiv} \in U$, tetszőleges $\equiv$ ekvivalenciarelációra, és így nyilván

$\mathfrak{A} \in U \Leftrightarrow \mathfrak{A}/_{\equiv} \in U$.

Bizonyitás:

$A/_{\equiv} \subseteq Sb\,A \in U$

□

HF.L7

Lemma: $\mathfrak{A} \in U \Longleftrightarrow Co\,\mathfrak{A} \in U$, és így HF. L6 miatt

$\mathfrak{A} \in U \Longleftrightarrow \{\mathfrak{A}/_r : r \in Co\,\mathfrak{A}\} \in U$.

Bizonyitás:

$Co\,\mathfrak{A} \subseteq Sb^2 A \in U$.

□

HF.L8

Lemma: $\mathcal{Cl} \in \mathcal{U} \iff \mathrm{Do}\,{}^{\backprime}\mathcal{Cl},\ {}_{\mathcal{Cl}}\Omega \in \mathcal{U}$.

(Megjegyezzük, hogy $\mathcal{L}_A \in \mathcal{U} \iff {}_{\mathcal{Cl}}\Omega \in \mathcal{U}$)

Bizonyitás:

A./ Legyen ${}_{\mathcal{Cl}}\Omega \in \mathcal{U}$. Ekkor

$${}^{\omega}A \in {}_{\mathcal{Cl}}K \in|\in|\in {}_{\mathcal{Cl}}\Omega\ ,\ \text{így}\ {}^{\omega}A \in \mathcal{U}.$$

mivel

$$A \subseteq \bigcup\bigcup\bigcup {}^{\omega}A\ ,$$ HF.L1 és HF.L2-ből adódik, hogy $A \in \mathcal{U}$,

most HF.L4 és $\mathrm{Do}\,{}^{\backprime}\mathcal{Cl} \in \mathcal{U}$ miatt

$$\mathcal{Cl} \in \mathcal{U}.$$

B./ Legyen $\mathcal{Cl} \in \mathcal{U}$. Ekkor

$$A \in|\in|\in \mathcal{Cl} \in \mathcal{U}\ ,\ \text{tehát}\ A \in \mathcal{U}\ .$$

mivel

${}^{\omega}A \subseteq \mathrm{Sb}(\omega \times A)$, és $\omega \in \mathcal{U}$, adódik, hogy ${}^{\omega}A \in \mathcal{U}$ és így $\mathrm{Sb}\,{}^{\omega}A \in \mathcal{U}$.

Most HF.L4 és $\ell \in \mathcal{U}$ miatt

$$\mathcal{L}_A \in \mathcal{U}.$$

□

<u>Kiegészités</u> az elsőrendü predikátumkalkulus definiciójához:

Legyen $t \in \mathcal{U}$, ekkor $\mathfrak{F}_{P_t} \in \mathcal{U}$. HF.L5 miatt.

$\mathbb{P}_{\mathfrak{A} \in N} \mathcal{L}_A$ nem feltétlenül $\mathcal{U}$-beli, tekintve, hogy N nem feltétlenül eleme $\mathcal{U}$-nak. Mindazonáltal az algebra definiciójából következik, hogy $\mathbb{P}_{\mathfrak{A} \in N} \mathcal{L}_A$ algebra. (Hiszen az algebra definiciójánál a halmaz szót nem $\mathcal{U}$-ra relativizálva használtuk, és ilyen értelemben a fenti szorzat halmaz.)

Hasonló okokból k^N sem eleme $\mathcal{U}$-nak, tehát $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k^{M_t} \rangle$ sem eleme $\mathcal{U}$-nak, de létezik. $(k^N)^o$ viszont már eleme $\mathcal{U}$-nak.

□

<u>Kiegészités</u> II2.2T -hez:

Minden $N \subseteq M_t$-hez van olyan $M_t \supseteq N' \in \mathcal{U}$, melyre $(k^N)^o = (k^{N'})^o$

Bizonyitás:

Legyen $H \overset{d}{=} \{ r : r \supseteq (k^N)^o,\ r$ maximális valódi kongruencia $\mathfrak{F}_{P_t}$-n$\}$

H minden elemének van modellje, tehát a Lövenheim-Skolem tétel miatt van $|I \cup \omega|$-nál kisebbegyenlő számosságu modellje is. Mivel $I \cup \omega \in \mathcal{U}$, H minden elemének van $\mathcal{U}$-beli modellje (HF.L4 alapján). Rendeljen egy függvény H minden eleméhez egy ilyen modellt, a függvény értékkészletét N' -vel jelölve kapjuk, hogy $N' \in \mathcal{U}$ ($H \in \mathcal{U}$ miatt).

Mivel $\bigcap H = (k^N)^o$, kapjuk, hogy $(k^N)^o = (k^{N'})^o$.

□

Ez a tétel egyben II2.3T-hez is nyujtja a szükséges kiegészitést. A fentihez hasonló a helyzet a dolgozatban definiált összes többi logika esetében is.

<u>Kiegészités</u> II4.1T-hez.

Bizonyitandó:

$$(\forall \mathcal{L} \in \mathrm{Lf} \cap \mathcal{U})(\exists \mathfrak{F}_{P_t} \in \mathcal{U})\ \ \mathfrak{F}_{P_t}/_{\equiv} \geqslant \mathcal{L}$$

Bizonyitás:

HF.L5 és HF.L6 miatt elég azt belátni, hogy a fenti tétel eredeti bizonyitása során megkonstruált

$$t = \langle |\Delta x| + 1 \rangle_{x \in C} \in \mathcal{U},$$

ez viszont triviális, hiszen $C \in \mathcal{U}$, HF.L4 miatt.

□

<u>Kiegészités</u> II5.1T-hez

ad A./ $(\forall \mathcal{B} \in \mathfrak{S} \cap \mathcal{U})(\exists N \in \mathcal{U})\ \ \mathcal{B} \cong \mathfrak{K}^N \in \mathcal{U}$

Bizonyitás:

Van olyan t és $\risingdotseq$, hogy $\mathcal{B} \cong \mathfrak{F}_{P_t}/_{\risingdotseq}$, ahol $\risingdotseq\ \supseteq\ \equiv$.

Van tehát olyan N', melyre $\risingdotseq\ = (k^{N'})^{\circ}$.

□

Az elsőrendü predikátumkalkulushoz irt kiegészités szerint N' -höz van olyan $N \in \mathcal{U}$, melyre $\leftrightharpoons = (k^N)^\circ$.

Eszerint

$$\mathcal{L} \cong \mathfrak{F}_{R_t}/_{\leftrightharpoons} \cong \mathfrak{F}_{R_t}/_{(k^N)^\circ} \cong \mathfrak{K}^N$$

$N \in \mathcal{U}$ -ból most már könnyen látható, hogy $\mathfrak{K}^N \in \mathcal{U}$.

ad B./ itt (az eddig bizonyitott lemmák miatt) nincs szükség kiegészitésre.

□

Kiegészités a III.1. fejezethez

$p_I^{(S)} K$ nem feltétlenül eleme $\mathcal{U}$-nak. Érvényes rá minden, amit k^N -ről elmondtunk.

□

Kiegészités a III2.2L-hez

Bizonyitandó:

Ha $\mathcal{L}r \cap \mathcal{U} \ni \mathcal{L} \models_{g} R_t \in \mathcal{U}$, akkor van $\mathfrak{A} \in M_t \cap \mathcal{U}$, melyre

$$\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \hat{g} .$$

Bizonyitás:

Azt fogjuk belátni, hogy a III2.2L-re a III. fejezetben adott bizonyitás során konstruált $\mathfrak{A}$ eleme $\mathfrak{U}$-nak.

Do $\mathfrak{A} \in \mathfrak{U}$, mert $R_t \in \mathfrak{U}$.

Mivel

${}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{N} = \mathfrak{B}$, HF.L8-ból adódik, hogy $\mathfrak{A} \in \mathfrak{U}$.

□

Kiegészités III2.2LK-hoz

Bizonyitandó:

$$(\forall \mathfrak{A} \in M_t \cap \mathfrak{U})\ \mathfrak{L}_A \in \mathfrak{U}$$

Bizonyitás:

Adódik HF.L8-ból.

□

$V(\varphi)$, $\varphi(v_i/v_j)$ definiciója és a Tarski-lemma bizonyitása.

$V(\varphi)$ a φ formulában előforduló változók indexhalmaza, azaz

$$V \in Hom(\mathfrak{F}r_{\mathfrak{P}_t}, \langle Sb\omega, \cup, Sb\omega \restriction Id, \langle x \cup \{i\} \rangle_{x \in Sb\omega}, \{i,j\} \rangle_{ij \in \omega})$$

olyan, hogy minden $q \in Do\,t$ -re

$$V(q v_{m_1} \dots v_{m_n}) \overset{d}{=} \{m_1, \dots, m_n\} \; .$$

Legyen $\mathbf{k}(i,j,\varphi)$ az a legkisebb szám, mely a φ-ben szereplő változók legnagyobbikánál, és i-nél és j-nél is nagyobb, azaz

$$k(i,j,\varphi) \overset{d}{=} \cup\{i, j, \cup V(\varphi)\} + 1 \, .$$

Most

Ha φ primformula vagy $=_{mp}$ alaku, akkor $\varphi(v_i/v_j)$ ugy áll elő φ-ből, hogy a v ill. $=$ jel i indexe helyébe mindenhol j-t irunk.

Röviditsük a $k(i,j,\varphi)$ betüsorozatot most k-val.

$$(\varphi \wedge \psi)(v_i/v_j) \overset{d}{=} \varphi(v_i/v_j) \wedge \psi(v_i/v_j)$$

$$(\neg \varphi)(v_i/v_j) \overset{d}{=} \neg(\varphi(v_i/v_j))$$

$$(\exists_n \varphi)(v_i/v_j) \overset{d}{=} \begin{cases} \exists_n(\varphi(v_i/v_j)) & , \text{ ha } n \neq i,j \\ \exists_n \varphi & , \text{ ha } n = i \\ (\exists_k \varphi(v_n/v_k))(v_i/v_j) & , \text{ ha } n = j \end{cases}$$

A Tarski lemma bizonyitása:

Könnyen látható, hogy a Tarski lemmát elég infimumtartó*/ ultraszürőre bizonyitani.

Jelöljük

egy b elem negáltját $\neg b$ -vel,

$\inf\limits_{\leq_H} H$ -t 0_H -val,

$\inf\limits_{\leq_H} A_i$ -t a_i -vel, és a később bevezetendő

$\inf\limits_{\leq_H} D_i$ -t d_i -vel.

Konstruálni fogunk egy centrált halmazt, mely minden i-re tartalmazza vagy a_i-t, vagy egy A_i-beli elem negáltját.

Legyen $D_0 \stackrel{d}{=} \{a\}$ és

$$D_{n+1} \stackrel{d}{=} \begin{cases} D_n \cup \{\neg b\} & \text{, ha } (\overset{d}{\exists} b \in A_n) \inf\limits_{\leq_H} \{d_n, \neg b\} \neq 0_H \\ D_n \cup \{a_n\} & \text{, egyébként.} \end{cases}$$

Minden n-re D_n centrált halmaz, sőt $d_n \neq 0_H$, mert mivel $< H, \leq_H >$ Boole-rendezés,

$$\inf_{\leq_H} \{a, \neg b\} = 0_H \iff a \leq_H b,$$

és ezért

---

*/ D infimumtartó A -ban ($\leq_H$ szerint), ha $(\forall B \in A)(B \Subset D \iff \inf\limits_{\leq_H} B \in D)$

$$(\forall b \in A_n) \inf_{\leqslant_H} \{ d_n, \neg b \} = 0_H \quad ,$$ -ból következik, hogy

$$(\forall b \in A_n) \quad d_n \leqslant_H b \quad ,$$ és emiatt

$$d_n \leqslant_H a_n \quad ,$$ azaz, $d_n \neq 0_H$ miatt

$$\inf_{\leqslant_H} \{ d_n, a_n \} \neq 0_H$$

Tehát $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ is centrált halmaz, és igy kiegészithető ultraszürővé.

Viszont minden $\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ -t tartalmazó D ultraszürő infimumtartó A -ban,

hiszen

$$A_i \subseteq D$$ -ből következik, hogy

$$(\forall b \in A_i) \neg b \notin D_{i+1} \quad ,$$ és igy

$$a_i \in D_{i+1}$$

$\square$

Az egyenlőséges logika visszavezetése egyenlőségmentesre.

A következőkben definiáljuk az egyenlőséges logika egy változatát (mely természetesen csak formailag tér el a II.2.-ben definiált $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ logikától):

A $t \in {}^I\omega$ tipusu egyenlőséges logika modellosztálya:

$$Y_t \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A} \cup \{\langle I, A \upharpoonright Id \rangle\} : \mathfrak{A} \in M_t \}$$

kiértékelőfüggvénye:

$$f \in Hom(\mathfrak{F}_{P_t}, \mathcal{L}_A)$$

olyan, hogy minden $r \in I$ -re

$$f(r v_{i_1} \ldots v_{i_{t_r}})_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \{ s \in {}^\omega A : \langle s_{i_1}, \ldots, s_{i_{t_r}} \rangle \in \mathfrak{A}_r \}$$

Az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, f \rangle$ párt nevezzük t-tipusu egyenlőséges logikának.

Az egyenlőségmentes logikát hasonlóan definiáljuk:

modellosztálya:

$$X_t \overset{d}{=} M_{t \cup \{\langle I, 2 \rangle\}}$$

kiértékelőfüggvénye:

$$h \in Hom(\mathcal{D}f\, \mathfrak{F}_{P_t}, \mathcal{D}f\, \mathcal{L}_A)$$

olyan, hogy minden $r \in I$ - re

$$h(r v_{i_1} \ldots v_{i_{t_r}})_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \{ s \in {}^\omega A : \langle s_{i_1}, \ldots, s_{i_{t_r}} \rangle \in \mathfrak{A}_r \}$$

$$h(=_{ij})_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \{ s \in {}^\omega A : \langle s_i, s_j \rangle \in \mathfrak{A}_I \}$$

Az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, h \rangle$ párt nevezzük egyenlőségmentes logikának.

Legyen $\Sigma \subseteq F_{P_t}$ a következő négy axiómasémával definiált formulák halmaza:

1./ $=_{ij} \rightarrow =_{ji}$

2./ $(=_{im} \wedge =_{mj}) \rightarrow =_{ij}$

3./ $\varphi \rightarrow =_{ii}$, ahol $\varphi \in F_{P_t}$

4./ $=_{ij} \rightarrow (\alpha v_i \beta \leftrightarrow \alpha v_j \beta)$, ahol $\alpha v_i \beta \in P_t$

$$\mathfrak{A} \overset{h}{\models} \varphi \overset{d}{\Longleftrightarrow} h(\varphi)_{\mathfrak{A}} = 1^{(\mathcal{L}_A)}$$

$$Y'_t \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in X_t : \mathfrak{A} \overset{h}{\models} \Sigma \}$$

Tétel:

a./ $Y'_t \supseteq Y_t$

b./ $(\forall \mathfrak{A} \in Y'_t)(\exists \mathfrak{B} \in Y_t)(\forall \varphi \in F_{P_t})(\mathfrak{A} \overset{h}{\models} \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \overset{h}{\models} \varphi)$

Bizonyitás:

Ad a./ triviális

Ad b./ Legyen $\mathfrak{A} \in Y'_t$

Ekkor $\mathfrak{A} \overset{h}{\models} \Sigma$.

Σ viszont pontosan azt mondja ki, hogy $\mathfrak{A}_I$ univerzális kongruencia az $\mathfrak{A}$ strukturán. Könnyen belátható, hogy egyenlőségmentes logikában egy struktura és valamely univerzális kongruenciával vett faktorstrukturája megkülönböztethetetlenek ([Andr. 72]). Tehát $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_I$ megkülönböztethetlenek.

Viszont $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_I \in Y_t$.

□

Következmény:

Bármely, az $\langle \mathfrak{F}_I , \dot{f} \rangle$ logika Σ elméletére, azaz az $\langle \mathfrak{F}_I , f^{Y_t'} \rangle$ logikára érvényes kijelentés érvényes az $\langle \mathfrak{F}_I , h \rangle$ logikára is, ha a kijelentés átalakitható ugy, hogy benne $\mathfrak{A} \in X_t$ strukturák helyett a nekik megfelelő $(\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ h)^{\circ}$ kongruenciarelációk szerepeljenek.

□

Megjegyzés:

A fenti következmény szerint pl. a teljességi tételt elég az egyenlőségmentes logika Σ elméletére kimondani és bizonyitani, viszont a Σ szerkezete olyan triviális, hogy gyakorlatilag elég az egyenlőségmentes logikára bizonyitani; a kompaktsági tételt elég az egyenlőségmentes logikára bizonyitani, stb. A fenti következmény közvetlenül nem mondja ki pl. hogy a Lövenheim-Skolem tételt vagy az ultraszorzat tételt elég lenne az egyenlőségmentes logikára bizonyitani. Mindazonáltal az utóbbinak kimondható olyan változata, melyre már vonatkozik a fenti következmény. Ezt érdemes kihasználni, hiszen az egyenlőségmentes logikában egyszerübb az ultraszorzat definiciója, nevezetesen nem kell faktorizálni.

□

Algebrai függelék

III1.1T

Tétel:

a./ $\mathfrak{F}_I^{(S)} K = \mathfrak{F}_I^{(S)} \mathbb{S}\mathbb{P} K$

b./ $\mathfrak{G}_I^{(S)} K = \mathfrak{G}_I^{(S)} \mathbb{S}\mathbb{P} K$

Bizonyitás:

Ad a./

1./ $\mathfrak{G}_I^{(S)} K \supseteq \mathfrak{G}_I^{(S)} \mathbb{S}\mathbb{P} K$,

mert $K \subseteq \mathbb{S}\mathbb{P} K$.

2./ $\mathfrak{G}_I^{(S)} K \subseteq \mathfrak{G}_I^{(S)} \mathbb{S}\mathbb{P} K$,

mert

legyen $R \supseteq S$ olyan, hogy $\mathfrak{F}_I/_R \in \mathbb{S}\mathbb{P} K$.

Ekkor van $L \subseteq K$, és $f \in \mathrm{Ism}(\mathfrak{F}_I/_R , \mathbb{P}_{\mathfrak{A}\in L} \mathfrak{A})$.

Legyen $Q_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} (\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ f \circ R^{*})^{\circ}$

Ekkor minden $\mathfrak{A} \in L$ - re

$$\mathfrak{F}_I/_{Q_{\mathfrak{A}}} \in \mathbb{I}\mathbb{S} K \quad \text{és} \quad Q_{\mathfrak{A}} \supseteq S$$

Most a bizonyitandó adódik abból, hogy

$$R = \bigcap_{\mathfrak{A}\in L} Q_{\mathfrak{A}} \quad .$$

□

III1.2T

Tétel:

$$p_I^{(S)} K^\circ = Cr_I^{(S)} K \quad .$$

Bizonyitás:

$$\langle x, y \rangle \in p_I^{(S)} K^\circ \quad \text{csakkor}$$

$$(\forall g \in \Gamma_I^{(S)} K) \; g_x = g_y \quad \text{csakkor}$$

$$\langle x, y \rangle \in Cr_I^{(S)} K^\circ \quad .$$

□

Technikai lemma III2.2L-hez:

Legyen $\mathcal{B}\in \mathcal{L}v$, $A\in B$ és $\mu\cdot$ egy-egyértelmü transzformáció ω-n.

Ekkor

$$s^{(\mathcal{B})}_{[\mu_0/\nu_0,\dots,\mu_n/\nu_n]}A = \{ s\in 1^{(\mathcal{B})} : (\exists z\in A)(\langle z_{\mu_0},\dots,z_{\mu_n}\rangle = \langle s_{\nu_0},\dots,s_{\nu_n}\rangle \,\&\, (\forall m\notin \mu^*(n+1))z_m = s_m)\}$$

Bizonyitás:

n (azaz a transzformáció kanonikus alakjának hossza) szerinti indukcióval:

1./ $n=0$ -ra

$$s_{\mathcal{J}}A = A = \{ s : (\exists z\in A)(\forall m) z_m = s_m \}$$

2./ $n=1$ -re

Legyen $i\neq j$.

$$s_{[i/j]}A \underset{\substack{\mathcal{B}\in CA\\ 1.11.11.(i)}}{=} s^{i}_{j}A \underset{\mathcal{B}\in \mathcal{H}a}{=} C_i(D_{ij}\cap A) = \{ s : (\exists z\in D_{ij}\cap A)(\forall m\neq i) z_m = s_m \} =$$

$$\underset{i\neq j}{=} \{ s : (\exists z\in A)(z_i = s_j \,\&\, (\forall m\neq i) z_m = s_m) \}$$

3./ Feltéve, hogy $k\leqslant n$-re igaz az állitás:

$$s_{[\mu_0/\nu_0,\dots,\mu_n/\nu_n]}A \underset{\substack{\mathcal{B}\in CA\\ 1.11.11.(i),(iv)}}{=} s^{\pi}_{\nu_0}\, s_{[\mu_1/\nu_1,\dots,\mu_n/\nu_n]}\, s^{\mu_0}_{\pi} A \quad , \text{ ahol}$$

$$\pi \notin \mu^*(n+1)\cup \nu^*(n+1)\cup \Delta A$$

□

Az indukciós feltételből következően:

$$s \in s^{\pi}_{\nu_0} S_{[\mu_1/\nu_1,\dots,\mu_n/\nu_n]} s^{\mu_0}_{\pi} A \iff (\exists z \in S_{[\mu_1/\nu_1,\dots,\mu_n/\nu_n]} s^{\mu_0}_{\pi} A)(z_\pi = s_{\nu_0} \;\&\; (\forall m \neq \pi)\, z_m = s_m)$$

$$z \in S_{[\mu_1/\nu_1,\dots,\mu_n/\nu_n]} s^{\mu_0}_{\pi} A \iff (\exists z' \in s^{\mu_0}_{\pi} A)(\langle z'_{\mu_1},\dots,z'_{\mu_n}\rangle = \langle z_{\nu_1},\dots,z_{\nu_n}\rangle \;\&\; (\forall m \notin \{\mu_1,\dots,\mu_n\})\, z'_m = z_m)$$

$$z' \in s^{\mu_0}_{\pi} A \iff (\exists z'' \in A)(z''_{\mu_0} = z'_\pi \;\&\; (\forall m \neq \mu_0)\, z''_m = z'_m)$$

Igy

$$s \in S_{[\mu_0/\nu_0,\dots,\mu_n/\nu_n]} A \quad \text{csakkor} \quad (\exists z)(\exists z')(\exists z'' \in A)$$
$$(\quad z''_{\mu_0} = z'_\pi \;\&\; (\forall m \neq \mu_0)\, z''_m = z'_m \;\&$$
$$\&\; \langle z'_{\mu_1},\dots,z'_{\mu_n}\rangle = \langle z_{\nu_1},\dots,z_{\nu_n}\rangle \;\&\; (\forall m \notin \{\mu_1,\dots,\mu_n\})\, z'_m = z_m \;\&$$
$$\&\; z_\pi = s_{\nu_0} \;\&\; (\forall m \neq \pi)\, z_m = s_m \;)$$

$$\text{csakkor} \quad (\exists z)(\exists z')(\exists z'' \in A)$$
$$(\; s_{\nu_0} = z_\pi = z'_\pi = z''_{\mu_0} \;\&$$
$$\&\; \langle s_{\nu_1},\dots,s_{\nu_n}\rangle = \langle z_{\nu_1},\dots,z_{\nu_n}\rangle = \langle z'_{\mu_1},\dots,z'_{\mu_n}\rangle = \langle z''_{\mu_1},\dots,z''_{\mu_n}\rangle \;\&$$
$$\&\; (\forall m \notin \{\pi,\mu_0,\dots,\mu_n\})\; s_m = z_m = z'_m = z''_m \;)$$

$\pi \notin \{\mu_1,\dots,\mu_n\}$

$\pi \notin \{\nu_1,\dots,\nu_n\}$

$\mu_0 \notin \{\mu_1,\dots,\mu_n\}$

$$\text{csakkor} \quad (\exists z'' \in A)(\langle s_{\nu_0},\dots,s_{\nu_n}\rangle = \langle z''_{\mu_0},\dots,z''_{\mu_n}\rangle \;\&\; (\forall m \notin \{\pi,\mu_0,\dots,\mu_n\})\, s_m = z_m)$$

$$\text{csakkor} \quad (\exists z'' \in A)(\langle s_{\nu_0},\dots,s_{\nu_n}\rangle = \langle z''_{\mu_0},\dots,z''_{\mu_n}\rangle \;\&\; (\forall m \notin \{\mu^*(n+1)\})\, s_m = z_m)$$

$\mathscr{B} \in \mathscr{L}\sigma$

$\pi \notin \Delta A$

□

A TANULMÁNYBAN HASZNÁLT GÓT BETÜK JEGYZÉKE .

$\mathfrak{A}$	A
$\mathfrak{B}$	B
$\mathfrak{C}$	C
$\mathfrak{F}$	F
$\mathfrak{G}$	G
$\mathfrak{K}$	K

IRODALOMJEGYZÉK

[Andr. 72]

Problémaorientált nyelvhierarchia és beállitó logika; Andréka, H. Gergely, T. Németi, I.; MTA KFKI, 1972, IV + 122 o.

[Andréka-Gergely-Németi 73a]

O jazükah vüszsevo porjadka; Andréka, H. Gergely,T. Németi,I.; Kibernyetyika (Kiev) megjelenés alatt.

[Andréka-Gergely-Németi 73b]

Privegyenyije mnogoszortovoj logiki; Andréka,H. Gergely,T. Németi,I.; Kibernyetyika (Kiev) megjelenés alatt.

[Andréka-M.Pajzs-Németi 73]

A Boole-algebrák minimális definiáló nyelvéről; Andréka,H. M.Pajzs,K. Németi,I.; Számológép 73/1 1973 , 59-75 o.

[Bell 69]

Models and Ultraproducts; Bell,J.L. Slomson,A.B.; North-Holland Publ.Co., 1969, IX + 322 o.

[Cohn 65]

Universal algebra; Cohn,P.M.; Harper and Row Publ.N.Y., 1965, XVIII + 333 o.

[Enderton 72]

A mathematical introduction to logic; Enderton, H.B.; Academic Press, 1972, XIII + 295 o.

[Gabriel 62]

Des catégories abéliennes; Gabriel,P., Bull.Soc.Math.France, 90 1962 , 323-448 o.

[Hayes 71]

A logic of action; Hayes,P.; Machine Intelligence 6, Edinbourgh University Press, 1971, 495 - 52o o.

[Henkin-Tarski 61]

Cylindric algebras; Henkin,L. Tarski,A.; Lattice theory, Proc.symp. in pure math., vol.2, ed. R.P.Dilworth, Amer. Math.Soc., Providence, 1961, 83 - 113 o.

[Henkin-Monk-Tarski 71]

Cylindric algebras part I.; Henkin,L. Monk,J.V. Tarski,A.; North-Holland Publ.Co. 1971, VI + 5o8 o.

[Monk 61]

On the representation theory for cylindric algebras; Monk,J.O.; Pacific J. Math., vol.11 1961 , 1447 - 1457 o.

[Sonner 62]

The formal definition of categories; Sonner,J.; Math.Zeitsch. 8o 1962 , 163 - 176 o.

[Zeitsch.73. Heft 3]

Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1973. Heft 3.

[Lucas 68]

Sur l'equivalence des algèbres cylindriques et polyadiques; Lucas,Th; Bull. Soc. Math. Belg., vol. 20 1968, 236-263 o..

D E F I N I C I Ó J E G Y Z É K

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
$A \Rightarrow B$	1		az A állításból következik B állítás.
$Sb\,A$	1	27	A részhalmazainak halmaza: $Sb\,A \overset{d}{=} \{X : X \subseteq A\}$
$Do\, f$	1	28	az f függvény vagy reláció értelmezési tartománya
$Rg\, f$	1	28	f értékkészlete
$A \& B$	1		"A és B"
$\bigcup A$	1	27	$\bigcup A \overset{d}{=} \{x : x \in \mid \in A\}$
^{B}A	3	29	descartes hatványozás: $^{B}A \overset{d}{=} \{f : f: B \to A\}$
f_x, fx	3	28	az f függvény x helyen felvett értéke: $f_x \overset{d}{=} fx \overset{d}{=} f(x)$
$0, 1, 2, \dots$	3	32	a természetes számok halmazelméleti definícióját használjuk: $0 \overset{d}{=} \emptyset$, $1 \overset{d}{=} \{0\}$, $2 \overset{d}{=} \{0,1\}, \dots$
$A \overset{d}{=} B$	4		az $A = B$ egyenlettel definiáljuk A -t
ℓ	4		$\ell \overset{d}{=} \{\langle\wedge,3\rangle, \langle\neg,2\rangle, \langle\exists_i,2\rangle, \langle =_{ij},1\rangle : i,j \in \omega\}$
$\wedge$			
$\neg$			
$\exists_i$			
$=_{ij}$			
$\cdot^{(\mathfrak{A})}$	5	162	$\cdot^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} \mathfrak{A}_\wedge$
$-^{(\mathfrak{A})}$	5	162	$-^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} \mathfrak{A}_\neg$
$c_i^{(\mathfrak{A})}$	5	162	$c_i^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} \mathfrak{A}_{\exists_i}$
$d_{ij}^{(\mathfrak{A})}$	5	162	$d_{ij}^{(\mathfrak{A})} \overset{d}{=} \mathfrak{A}_{=_{ij}}$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
$+^{(\mathfrak{A})}$, $1^{(\mathfrak{A})}$, $0^{(\mathfrak{A})}$	5	162	levezetett müveletek
$\vee$, $\to$	5		levezetett müveletjelek
$\Delta^{(\mathfrak{A})}$	6	199	$\Delta^{(\mathfrak{A})} x \overset{d}{=} \{ i\in\omega : c_i x \neq x \}$
$\sim A$	6		"nem A"
$A \vee B$	6		"A vagy B".
$\mathfrak{Fr}_X$	7	13o	az X -el generált szóalgebra
Fr_X	7	13o	az $\mathfrak{Fr}_X$ algebra alaphalmaza: $Fr_X \overset{d}{=} \mathfrak{Fr}_X(0)$
$\cong$	7	68	izomorf
$Cr_X K$	7	131	a K algebraosztály X -el generált szabad kongruenciája: $Cr_X K \overset{d}{=} \bigcap\{ R\in Co\,\mathfrak{Fr}_X : \mathfrak{Fr}_X/R \in \mathbf{IS}K \}$
$\mathfrak{Fr}_X K$	7	131	a K algebraosztály X -el generált szabadalgebrája: $\mathfrak{Fr}_X K \overset{d}{=} \mathfrak{Fr}_X / Cr_X K$
$A \overset{d}{\Longleftrightarrow} B$	8		az A -ban szereplő ismeretlen fogalmat avval az állitással definiáljuk, hogy $A \Leftrightarrow B$
$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$	8	58	$\mathfrak{A}$ részalgebrája $\mathfrak{B}$ -nek
CA	9	163	a cilindrikus algebrák osztálya
(C0)-(C7)	9	162	a cilindrikus egyenletek, azaz $CA \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models (C0)-(C7) \}$
$\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A}$	9	163	az $\mathfrak{A}$ ℓ -tipusu algebra Boole-reduktuma: $\mathfrak{Bl}\,\mathfrak{A} \overset{d}{=} \{0,\wedge,\neg\} \upharpoonright \mathfrak{A}$
$X \upharpoonright f$	9	28	az f függvény lekorlátozása az X halmazra: $X\upharpoonright f \overset{d}{=} \{ \langle x, f_x \rangle : x \in X \}$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
ω	lo	32	a nemnegativ egész számok halmaza: $\omega \overset{d}{=} \{0,1,2,\dots\}$
Lf	lo	231	a lokálisan véges cilindrikus algebrák osztálya: $Lf \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in CA : (\forall x\in \mathfrak{A}_0)\ \lvert\Delta^{(\mathfrak{A})}x\rvert < \omega\}$
$\mathcal{L}_A$	11	165	az A halmazhoz tartozó teljes cilindrikus halmazalgebra: $\mathcal{L}_A \overset{d}{=} \langle Sb\,{}^{\omega}A, \cap, \smallsetminus^{(A)}, C_i^{(A)}, D_{ij}^{(A)}\rangle_{ij\in\omega}$
$\smallsetminus^{(A)}$	11	165	az ${}^{\omega}A$ halmazbeli komplementálás: $\smallsetminus^{(A)}X \overset{d}{=} {}^{\omega}A \smallsetminus X$
$C_i^{(A)}$	11	165	az i -edik dimenzió szerinti vetités: $C_i^{(A)}X \overset{d}{=} \{s\in {}^{\omega}A : (\exists z\in X)(\forall i\neq j\in\omega)\, s_j = z_j\}$
$D_{ij}^{(A)}$	11	165	$D_{ij}^{(A)} \overset{d}{=} \{s\in {}^{\omega}A : s_i = s_j\}$
$\mathcal{H}a$	11	165	a halmazalgebrák osztálya: $\mathcal{H}a \overset{d}{=} \mathbb{S}\{\mathcal{L}_A : A \text{ halmaz}\}$
$\mathbb{S}$	11	58	a részalgebraképzés operátora: $\mathbb{S}K \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \subseteq\mid\in K\}$
$\mathcal{L}v$	11		a lokálisan függetlenül véges cilindrikus halmazalgebrák osztálya: $\mathcal{L}v \overset{d}{=} \{\mathfrak{A}\in\mathcal{H}a : (\forall a\in\mathfrak{A}_0)(\lvert\Delta a\rvert\in\omega\ \&\ (s\in a \Leftrightarrow (\exists z\in a)(\forall i\in\Delta a)\, s_i = z_i)\}$
$\mathcal{R}e$	12	171	a reprezentálható cilindrikus algebrák osztálya: $\mathcal{R}e \overset{d}{=} \mathbb{H}\mathbb{S}\mathbb{P}\,Lf$
$\mathbb{H}$	12	68	a homomorf-kép képzés operátora: $\mathbb{H}K \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \preccurlyeq\mid\in K\}$
$\mathbb{P}$	12	83	a direktszorzatképzés operátora: $\mathbb{P}K \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} : (\exists L\subseteq K)\ \mathfrak{A} \cong \mathbb{P}_{\mathfrak{B}\in L}\mathfrak{B}\}$
ε_X	16	3o	az X koordinátára való vetitőfüggvény: ha $x\in Do\, f$, akkor $\varepsilon_x f \overset{d}{=} f(x)$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
$r\circ q$	16	29	két reláció kompoziciója (forditott relativ szorzata): $r\circ q \overset{d}{=} \{\langle b,a\rangle : (\exists c)(\langle c,a\rangle \in r \,\&\, \langle b,c\rangle \in q)\}$
$\mathrm{Ho}\,\mathfrak{A}$	16	67	az $\mathfrak{A}$ -n értelmezett homomorfizmusok osztálya: $\mathrm{Ho}\,\mathfrak{A} \overset{d}{=} \{f : (\exists \mathfrak{B})\, f \in \mathrm{Ho}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})\}$
r^0	17		az r -hez tartozó ekvivalenciareláció r értelmezési tartományán: $r^0 \overset{d}{=} r\,\vert\, r^{-1}$ megjegyzés: $r^0 = \{\langle x,y\rangle : r^\star x \not\triangle r^\star y\}$
r^*	17	28	az r -hez tartozó $\mathrm{Sb}\,\mathrm{Do}\,r$-en értelmezett függvény, r^*X az X halmaz képe r szerint: $r^*X \overset{d}{=} \{y : X \ni\vert\, r\, y\}$
$f^*\mathfrak{A}$	17	68	csak akkor van értelmezve, ha van olyan $\mathfrak{B}$, hogy $f \in \mathrm{Ho}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$, és ekkor $f^*\mathfrak{A} \overset{d}{=} \mathfrak{B}$.
v	23		egy kölcsönösen egyértelmü függvény, ugy hogy $\mathrm{Do}\,v = \omega$
P_t	23		a t-tipusu primformulák halmaza: $P_t \overset{d}{=} \bigcup_{n\in\omega} (t^{-1}{\star}n \times {}^{n}\mathrm{Rg}\,v)$
$r^\star$	23	28	az r relációhoz tartozó függvény, $r^\star x$ az x pont képe r szerint: minden $x \in \mathrm{Do}\,r$-re $r^\star x \overset{d}{=} \{y : x r y\}$
M_t	24		a t-tipusu strukturák osztálya: $M_t \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} : \mathrm{Do}\,\mathfrak{A} = 1 \cup \mathrm{Do}\,t, (\forall s \in \mathrm{Do}\,t)\, \mathfrak{A}_s \subseteq {}^{t_s}\mathfrak{A}_0\}$
k^N	24		az F_{P_t} formulák kiértékelőfüggvénye az N modellosztályban, $k^N(\varphi)_{\mathfrak{A}}$ a φ formula igazságértéke az $\mathfrak{A} \in N$ strukturában
$\mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$	24	68	az $\mathfrak{A}$ -ból $\mathfrak{B}$ -be menő homomorfizmusok halmaza
$r^\bullet$	33		a legnagyobb ekvivalenciareláció, mely része az r előrendezésnek: $r^\bullet \overset{d}{=} r \cap r^{-1}$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	jelentés
$\mathop{P}\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i$	24	83	az $\mathfrak{A}_i$ algebrák direktszorzata az I indexhalmaz szerint
$\langle f_x \rangle_{x\in I}$	24	28	függvények egy megadási módja: $\langle f_x\rangle_{x\in I} \overset{d}{=} \{\langle x, f_x\rangle : x\in I\}$
$\mathfrak{A}\models\varphi[s]$	25	44	az $\mathfrak{A}$ strukturában a változók s kiértékelése mellett igaz a φ formula
$\equiv_N$	25	45	az N modellosztály szerint vett szemantikus ekvivalencia: $\equiv_N \overset{d}{=} (\overset{N}{k})^\circ$
$Co\,\mathfrak{A}$	26	73	az $\mathfrak{A}$ algebra kongruenciáinak halmaza
$\tilde{\mathfrak{L}}^N$	26		az N modellosztályhoz tartozó szemantikus algebra: $\tilde{\mathfrak{L}}^N \overset{d}{=} \overset{N}{k}{}^* \mathfrak{Fr}_{P_t}$
$\equiv$ k $\mathfrak{L}$	26		jelentésük rendre: $\equiv_{M_t}$, $\overset{M_t}{k}$, $\tilde{\mathfrak{L}}^{M_t}$
$\mathbb{I}$	26	68	az izomorf-kép képzés operátora: $\mathbb{I}K \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \cong\mid\in K\}$
Δ	32		diszjunktság jele: $A\Delta B \overset{d}{\Leftrightarrow} A\cap B = 0$
$\not\Delta$	32		a diszjunktság tagadása: $A \not\Delta B \overset{d}{\Leftrightarrow} \sim A\Delta B$
$\leqslant$	33		szemantikus rendezés a formulákon: $\varphi\leqslant\psi \overset{d}{\Leftrightarrow} (\forall\mathfrak{A}\in M_t)\, k(\varphi)_{\mathfrak{A}} \subseteq k(\psi)_{\mathfrak{A}}$
$\varphi(v_i/v_j)$	34	169	az a formula, melyet ugy kapunk φ-ből, hogy v_i minden szabad előfordulását kicseréljük v_j-re, miközben a kötött változókat átnevezzük, ha az ütközés elkerüléséhez szükséges. Pontosabban lásd 126 old.

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
$s(i/a)$	34		az s sorozat módositása az i helyen a -ra: $s(i/a) \overset{d}{=} \langle s_0,\dots,s_{i-1},a,s_{i+1},\dots\rangle$
$a/_S$	35	30	az a elem ekvivalenciaosztálya az S ekvivalenciareláció szerint: $a/_S \overset{d}{=} S^{*} a$
$R/_S$	35	30	az R relációból képzett faktorreláció az S ekvivalenciareláció szerint: $R/_S \overset{d}{=} \{\langle a/_S, b/_S\rangle : \langle a,b\rangle \in R\}$
Id	38	27	az azonosság (vagy egység-) reláció: $Id \overset{d}{=} \{\langle a,a\rangle : a=a\}$
$\leqslant^N$	36		a szemantikus előrendezés az N modellosztály szerint: $\varphi \leqslant^N \psi \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall \mathfrak{A}\in N)\, k(\varphi)_{\mathfrak{A}} \subseteq k(\psi)_{\mathfrak{A}}$
${}_{f(x)}\langle g(x)\rangle_{x\in A}$	40	28	függvények megadási módja: ${}_{f(x)}\langle g(x)\rangle_{x\in A} \overset{d}{=} \{\langle f(x), g(x)\rangle : x\in A\}$
$\mathfrak{S}$	48		a formulaalgebrák osztálya: $\mathfrak{S} \overset{d}{=} \mathbb{H}\{\mathfrak{Fr}_{R_t/\equiv} : Rg\, t \subseteq \omega\setminus 1\}$
$\mathfrak{A} \succcurlyeq \mathfrak{B}$	49	68	az $\mathfrak{A}$ algebrának homomorf képe a $\mathfrak{B}$ algebra
$[i_1/j_1,\dots,i_n/j_n]_A$	52	36	véges transzformáció megadási módja (ha $A\subseteq\omega$, akkor az A indexet elhagyjuk): $[i_1/j_1,\dots,i_n/j_n]_A \overset{d}{=} \{\langle i_1,j_1\rangle,\dots,\langle i_n,j_n\rangle\} \cup ((A\setminus\{i_1,\dots,i_n\}) \upharpoonright Id)$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
$S_{\mathfrak{T}}$	52	236	a $\mathfrak{T}$ véges transzformációhoz tartozó helyettesitési operátor: Legyen $\mathfrak{T}$ kanonikus reprezentációja $\mathfrak{T} \overset{d}{=} [\mu_0/\nu_0, \dots, \mu_{n-1}/\nu_{n-1}]$ és π egy olyan kölcsönösen egyértelmü függvény, melyre $\pi^* n \,\Delta\, (\mu^* n \cup \nu^* n \cup \Delta x)$ most: $S_{\mathfrak{T}}\, x \overset{d}{=} s^{\pi_0}_{\nu_0} \dots s^{\pi_{n-1}}_{\nu_{n-1}} s^{\mu_0}_{\pi_0} \dots s^{\mu_{n-1}}_{\pi_{n-1}}\, x$ Ha a $\mathfrak{T}$ függvény nem transzformáció, akkor $S_{\mathfrak{T}}$ képzéséhez transzformációvá kell kiegésziteni: a kapott transzformációt a $\mathrm{Fd}\,\mathfrak{T}$ halmazon értelmezzük, és ott, ahol $\mathfrak{T}$ nincs értelmezve, az Id függvénnyel egyezik meg.
$r\|q$	52	28	az r és q relációk relativ szorzata: $r\|q \overset{d}{=} \{\langle x,y\rangle : (\exists z)(\langle x,z\rangle \in r \;\&\; \langle z,y\rangle \in q)\}$
$V(\varphi)$	53		a φ-ben előforduló változójelek indexeinek halmaza
s^i_j	55	189	az $\langle i,j\rangle$ dimenziópárhoz tartozó helyettesitési operátor: $s^i_j\, x \overset{d}{=} c_i(d_{ij} \cdot x)$
$\mathrm{Is}(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$	53	68	az $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-re menő izomorfizmusok halmaza
$_{\mathfrak{A}}\mathfrak{L}$	61		az $\mathfrak{A}$ strukturához tartozó igazságértékalgebra: $_{\mathfrak{A}}\mathfrak{L} \overset{d}{=} (\varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k)^* \mathfrak{Fr}_{P_t}$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	jelentés
$\overset{d}{\exists}$	63		$(\overset{d}{\exists}x)P_x$ jelentése a következő: " x -et ugy definiáljuk, hogy egy tetszőleges de rögzitett olyan elem, melyre P_x teljesül, és azt állitjuk, hogy ilyen létezik"
I	66		a Dot szöveget röviditi, azaz a vizsgálat tárgyát képező t tipus értelmezési tartománya: $I \overset{d}{=} Dot$
n	66		a t_q-1 szöveget röviditi: $n \overset{d}{=} t_q-1$
$\mathfrak{A}_{\widehat{g}}$	69		a g függvény homomorf kiterjesztése az $\mathfrak{A}$ strukturába: $g \subseteq \mathfrak{A}_{\widehat{g}} \in Hom(\mathfrak{F}_{Dog}, \mathfrak{A})$
$\mathfrak{A} \models_g S$	69		az $\mathfrak{A}$ algebrában a változójelek g kiértékelése mellett teljesülnek az S definiáló relációk, ill. egyenletek
$\mathfrak{C}_I^{(S)}K$	71	147	az I -vel generált K -szabad kongruencia S alatt: $\mathfrak{C}_I^{(S)}K \overset{d}{=} \bigcap\{R \in Co\,\mathfrak{F}_I : S \subseteq R, \mathfrak{F}_I/_R \in \mathbf{IS}K\}$
$\mathfrak{F}_I^{(S)}K$	71	147	az I -vel generált K-szabad algebra S alatt: $\mathfrak{F}_I^{(S)}K \overset{d}{=} \mathfrak{F}_I/_{\mathfrak{C}_I^{(S)}K}$
$\Gamma_I^{(S)}K$	72		azon algebra-kiértékelés párokat reprezentáló homomorfizmusok osztálya, melyekhez az algebra K -ból származik, a kiértékelés pedig teljesiti S -t: $\Gamma_I^{(S)}K \overset{d}{=} \{g \in Ho\,\mathfrak{F}_I : g^*\mathfrak{F}_I \in \mathbf{S}K, g^\circ \supseteq S\}$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
$\mathfrak{p}_I^{(S)} K$	72		a $\Gamma_I^{(S)} K$ homomorfizmusosztály szabadszorzata, ill. az I -vel generált K-szabadszorzat S alatt: $\mathfrak{p}_I^{(S)} K \stackrel{d}{=} \langle \langle g_x \rangle_{g \in \Gamma_I^{(S)} K} \rangle_{x \in \mathfrak{Fr}_I}$
D_t	75		az $\mathfrak{Fr}_{R_t}$ szóalgebrán értelmezett definiáló relációk, melyek $\mathfrak{Fr}_{R_t}/_{\equiv}$ dimenziókorlátozását fogalmazzák meg: $D_t \stackrel{d}{=} \{ \exists_j q v_{i_0} \dots v_{i_n} = q v_{i_0} \dots v_{i_n} : q \in I, i \in {}^{\omega}\omega, j \in \omega \setminus i^*(n+1) \}$
H_t	75		a helyettesitési kapcsolatokat megfogalmazó definiálórelációk: $H_t \stackrel{d}{=} \{ (=_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \dots v_{i_n}) = (=_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \dots v_{i_{m-1}} v_j v_{i_{m+1}} \dots v_{i_n}) : q \in I, i \in {}^{\omega}\omega, j \in \omega \}$
R_t	75		az $\mathfrak{Fr}_{R_t}$ szóalgebrán értelmezett definiálórelációk: $R_t \stackrel{d}{=} D_t \cup H_t$
S_t	75		a helyettesitési viszonyokat kényelmesebben kimondó definiálórelációk: $S_t \stackrel{d}{=} \{ q v_{i_0} \dots v_{i_n} = {}_{t_q}S_{t_q \mid i}(q v_0 \dots v_n) : q \in I, i \in {}^{\omega}\omega \}$
${}_H S_{\mathcal{T}}$	75		az $S_{\mathcal{T}}$ helyettesitési operátor argumentumtól függetlenitett alakja, melyben H helyettesiti Δx-et. Az ${}_H S_{\mathcal{T}}$ definiciója ugy nyerhető $S_{\mathcal{T}}$ definiciójából, hogy Δx-et mindenhol kicseréljük H -ra. Ha $\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Id}$, akkor ${}_H S_{\mathcal{T}} \stackrel{d}{=} \mathrm{Id}$
$\mathrm{Fd}\, r$	77	28	az r reláció tartománya a legkisebb olyan X halmaz, melyre $r \subseteq {}^2X$: $\mathrm{Fd}\, r \stackrel{d}{=} \mathrm{Do}\, r \cup \mathrm{Rg}\, r$
$\mathfrak{Sg}^{(\mathfrak{A})} X$	78	61	az $X \subseteq \mathfrak{A}_0$ halmazzal generált részalgebra $\mathfrak{A}$ -ban

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
$\exists!$	78		"van egy és csak egy"
$\Bbbk$	85		az $\mathfrak{Fr}_I$ elsőrendü nyelv kiértékelőfüggvénye
$\mathfrak{A} \models_g t$	90		az $\mathfrak{A}$ ℓ-tipusu algebrában a g kiértékelő függvény teljesiti a t dimenziókorlátozást: $\mathfrak{A} \models_g t \overset{d}{\iff} (\forall \langle r,n\rangle \in t)(\forall i \notin n)\mathfrak{A} \models_g \{\exists_i r = r\}$
$Cr^{(t)}K$	90	348	az I -vel generált K -szabad kongruencia a t dimenziókorlátozás alatt: $Cr^{(t)}K \overset{d}{=} Cr^{(\{\exists_i r = r \,:\, r\in I,\ i \notin t_r\})}K$
$\mathfrak{Fr}^{(t)}K$	90	348	az I -vel generált K -szabad algebra a t dimenziókorlátozás alatt: $\mathfrak{Fr}^{(t)}K \overset{d}{=} \mathfrak{Fr}_I / Cr^{(t)}K$
$P^{(t)}K$	90		azon $g \in Ho\,\mathfrak{Fr}_I$ homomorfizmusok szabadszorzata, melyre $\mathbf{S}K \ni g^{*}\mathfrak{Fr}_I \models_{I1g} t$ a formális definició analóg $Cr^{(t)}K$ definiciójával
$\doteq$	94		az $\langle \mathfrak{Fr}_I, \Bbbk \rangle$ változójelmentes elsőrendü predikátumkalkulus szemantikus ekvivalenciája: $\doteq \overset{d}{=} \Bbbk^{\circ}$
$\mathfrak{Fr}_{P_{K_t}}$	98		a függvényjeles elsőrendü predikátumkalkulus formuláinak halmaza, ($K \subseteq I$ a függvényjelek halmaza)
M^I	130		azon strukturák osztálya, melyek relációjelei I -ből származnak. Átnevezés erejéig az összes olyan struktura M^I -hez tartozik, melynek $\|I\|$ -nél kevesebb relációja van: $M^I \overset{d}{=} \{\mathfrak{A} : Do\,\mathfrak{A} = I \cup 1\} = \bigcup_{t \in I_\omega} M_t$

jel	oldalszám a tanulmányban	oldalszám a könyvben	j e l e n t é s
k	130		a tipusfüggetlen elsőrendü logika kiértékelőfüggvénye
M'_t	132		a legkisebb $\langle \mathfrak{F}_I , k \rangle$ -ben axiomatizálható modellosztály, mely tartalmazza M_t-t.
$VR^{(A)}$	133		függvény, mely minden $B \subseteq {}^{\omega}A$ -hoz hozzárendeli azt a relációt, melynek igazságértéke B : $VR^{(A)} \cdot B \overset{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{, ha } B = 0 \\ A & \text{, ha } B = {}^{\omega}A \\ \{(U\Delta^{(\mathfrak{F}_A)}B) \restriction s : s \in B\} & \text{, egyébként} \end{cases}$
N^I	134		az M^I modellosztály lényeges része: $N^I \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in M^I : (\forall r \in I)\, \mathfrak{A}_r = VR^{(A)} k(r)_{\mathfrak{A}} \}$
$\approx$	136		az $\langle \mathfrak{F}_I , k \rangle$ tipusfüggetlen elsőrendü logika szemantikus ekvivalenciája: $\approx \overset{d}{=} k^{\circ}$
$Df\, \mathfrak{A}$	154	164	az $\mathfrak{A}$ ℓ-tipusu algebra diagonálmentes reduktuma: $Df\, \mathfrak{A} \overset{d}{=} \{0, \wedge, \neg, \exists_i : i \in \omega\} \restriction \mathfrak{A}$
$Ho(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	167	68	az $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-re menő homomorfizmusok halmaza
$Ism(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	157		az $\mathfrak{A}$-ból $\mathfrak{B}$-be menő izomorfizmusok halmaza

I.

Előzmények

TARTALOM

I.1. Halmazelméleti kérdések

I.2. Algebra fogalma, ℓ-tipusu algebrák, szabadalgebra

$\mathfrak{A}$ egy $t \in {}^{I}\omega$-tipusu struktura $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $(Do\,\mathfrak{A} = I \cup 1\ \&\ (\forall g \in I)\,\mathfrak{A}_g \subseteq {}^{t(g)}\mathfrak{A}_0)$

$A \overset{d}{=} \mathfrak{A}_0$ az $\mathfrak{A}$ alaphalmaza

<u>Algebra</u> egy struktura, ha relációi függvények

ℓ definiciója; $\mathfrak{Fr}_X$, $\mathfrak{Fr}_X K$ és $Gr_X K$ definiciója

A tanulmány során <u>csak ℓ-tipusu</u> algebrákat vizsgálunk, tehát az a kijelentés, hogy "minden K algebraosztályra", azt jelenti, hogy "minden ℓ-tipusu K algebraosztályra".

Az ℓ-tipusu algebrák egy felirási módja:

$$\mathfrak{A} \overset{d}{=} \langle A, \mathfrak{A}_{\wedge}, \mathfrak{A}_{\neg}, \mathfrak{A}_{\exists_i}, \mathfrak{A}_{=_{ij}} \rangle_{ij<\omega}$$

I.3. Nevezetes ℓ-tipusu algebrák

CA , Lf , $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{H}a$, $\mathcal{L}v$ és $\mathcal{R}e$ definiciója

$\mathcal{R}e = \mathbb{SP}\,\mathcal{H}a = \mathbb{HSP}\,Lf \subsetneq CA$

II.

Logikai és cilindrikus algebrai előkészitő vizsgálatok

T A R T A L O M

II.1.

A logika fogalma

TARTALOM

II1.1D: Logika az $\langle \mathcal{F}, k \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow}$ szóalgebra az $\mathcal{F}$ &

$\& \ (\exists T, M)(Rg\, k \subseteq {}^{M}T \ \& \ (\forall x \in M)\, \varepsilon_x \circ k \in Ho\, \mathcal{F})$

II1.1M: Milyen meggondolások alapján választottuk ezt a logika-fogalmat.

Példa arra, hogy $(\forall x \in M)\, \varepsilon_x \circ k \in Ho\, \mathcal{F}$ nem helyettesithető $k \in Ho\, \mathcal{F}$-el.

II1.2D: $\langle \mathcal{F}_1, k_1 \rangle$ egyenértékű $\langle \mathcal{F}_2, k_2 \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} k_1^* \mathcal{F}_1 = k_2^* \mathcal{F}_2$

$\langle \mathcal{F}_1, k_1 \rangle$ ekvivalens $\langle \mathcal{F}_2, k_2 \rangle \overset{d}{\Longleftrightarrow} k_1^* \mathcal{F}_1 = k_2^* \mathcal{F}_2$ &

$\& \ (\exists$ rekurzív $g_1, g_2)(k_1 = k_2 \circ g_1 \ \& \ k_2 = k_1 \circ g_2)$

II.2.

Az elsőrendü predikátumkalkulus

T A R T A L O M

Az elsőrendü predikátumkalkulus $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t}, k^{M_t} \rangle$, ahol

ϑ az egész dolgozat folyamára rögzitett ω-n értelmezett kölcsönösen egyértelmü függvény

$P_t \overset{d}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} (t^{-1} {}^{\star} n \times {}^{n}Rg\,\vartheta)$

$\mathfrak{Fr}_{P_t}$ -ben a szokásos egyszerüsitéseket használjuk.

$k^N \in Hom(\mathfrak{Fr}_{P_t}, \mathbb{P}_{\mathfrak{A}\in N} \mathcal{L}_A)$; $k^N(r v_{i_1} \ldots v_{i_{t_r}}) \overset{d}{=} \langle \{ s \in {}^{\omega}A : \langle s_{i_1}, \ldots, s_{i_{t_r}} \rangle \in \mathfrak{A}_r \} \rangle_{\mathfrak{A}\in N}$

M_t a t-tipusu strukturák osztálya

II2.1M: Homomorf függvényeket szabad generátorrendszeren adunk meg.

$$\mathfrak{A} \models \varphi[s] \overset{d}{\iff} s \in k^{M_t}(\varphi)_{\mathfrak{A}}$$

$$\equiv_N \overset{d}{=} (k^N)^{\circ}$$

II2.1T: $\varphi \equiv_N \psi \iff (\forall \mathfrak{A} \in N, s)(\mathfrak{A} \models \varphi[s] \iff \mathfrak{A} \models \psi[s])$

II2.2T: $\equiv_N \in Co\, \mathfrak{Fr}_{P_t}$

Az M_t indexet általában elhagyjuk.

II2.3T: $\mathfrak{Fr}_{P_t} / \equiv_N \in CA$

II2.2M: Az it.kalk. a Boole-alg.k segitségével felépithető avval analóg módon, ahogyan a cilindrikus alg.k segitségével felépitettük a pred.kalk.t.

II.3.

Gödel teljességi tétel

TARTALOM

II3.1D: D szuprémumtartó A-ban $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $(\forall B\in A)(B \not\emptyset D \Longleftrightarrow \sup_{\leq_H} B \in D)$

II3.1L: $\left.\begin{array}{l} \leq_H \text{ Boole-rendezés} \\ A \subseteq Sb\, H,\ |A|\leq\omega \\ a \in H\setminus\{\inf_{\leq_H} H\} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\exists D)\left\{\begin{array}{lll} D & \text{ultraszűrője} & \leq_H\text{-nak} \\ D & \text{szuprémumtartó} & A\text{-ban} \\ D & \ni & a \end{array}\right.$

II3.2D: $\varphi \leq \psi \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall \mathfrak{A})\ k(\varphi)_{\mathfrak{A}} \subseteq k(\psi)_{\mathfrak{A}}$

$\varphi(v_i/v_j)$: φ-ben v_i-t összes szabad előfordulásán kicseréljük v_j-re.

II3.1T: egyenlőségmentes logikában

$\left.\begin{array}{llll} \preccurlyeq/_{\preccurlyeq}. & \text{Boole-rendezés} & & \\ \varphi\wedge\psi & \in & \varphi/_{\preccurlyeq}. \wedge_{\preccurlyeq} & \psi/_{\preccurlyeq}. \\ \neg\varphi & \in & \neg_{\preccurlyeq} & \varphi/_{\preccurlyeq}. \\ \exists_i\varphi & \in & \sup_{\preccurlyeq} & \{\varphi(v_i/v_j): j\in\omega\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \leq\, \subseteq\, \preccurlyeq$

A tétel bizonyitása során használt lemmák:

II3.2L: $\left.\begin{array}{ll} D & \text{ultraszűröje } \preccurlyeq/_{\preccurlyeq}\text{-nak} \\ D & \text{szuprémumtartó } \{\{\varphi(v_i/v_j): j\in\omega\}: i\in\omega, \varphi\in F\}\text{-ben} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \varphi\wedge\psi \in UD & \Leftrightarrow & \varphi,\psi \in UD \\ \neg\varphi \in UD & \leftrightarrow & \varphi \notin UD \\ \exists_i\varphi \in UD & \Leftrightarrow & (\exists y)\ \varphi(v_i/y)\in UD \end{array}\right.$

II3.3L: ———— " ———— $\Longrightarrow (\exists\mathfrak{A})(\varphi\in UD \leftrightarrow v \in k(\varphi)_{\mathfrak{A}})$

II3.1TK: Egyenlőséges logikában $\preccurlyeq$-nek még azt is ki kell fejeznie, hogy $\mathfrak{A}_=$ univerzális kongruencia.

II3.1M: Néhány szinonima.

II3.2M: A $\leq$ reláció egy másfajta előállitását is szolgáltatja a tétel.

II3.3M: A tétel használata kalkulusok teljességének ellenőrzésére.

II.4.

Reprezentációtétel

T A R T A L O M

$$\mathfrak{S} \overset{d}{=} \mathbb{H} \{ \mathfrak{F}_{R_t} / _{\equiv} \ : \ t \text{ tipus} \}$$

II4.1T: $\mathfrak{S} = \mathsf{Lf}$

A bizonyitás során felhasznált definiciók és lemmák:

Minden $\mathcal{L} \in \mathsf{Lf}$ -hez

$$\kappa \in \mathrm{Ho}(\mathfrak{F}_{R_t}, \mathcal{L}) \ ; \quad \kappa(x v_{i_0} \ldots v_{i_{|\Delta x|}}) \overset{d}{=} s_{[y_1/i_1, \ldots, y_{|\Delta x|}/i_{|\Delta x|}]} x$$

$V(\varphi)$ **a φ-ben előforduló változók indexeinek halmaza**

II4.1L: $\Delta \kappa(\varphi) \subseteq V(\varphi)$

II4.2L: $\kappa(\varphi(v_i/v_j)) = s^i_j \, \kappa(\varphi)$

II.5.

A formulaalgebrák és halmazalgebrák kapcsolata

T A R T A L O M

II5.1T: $\mathbf{SP}\,\mathfrak{F} = \mathbf{SP}\,\mathcal{L}w$

II5.1M: A tétel a formulaalgebrák, ill. lokálisan f.véges cil.halmaz-algebrák egy-egy reprezentációtételének is felfogható.

II4.1T,II5.1TK: $\mathbf{SP}\,\mathcal{L}w = \mathbf{SP}\,\mathsf{Lf}$

III.
Az elsőrendü predikátumkalkulus algebrai vizsgálata.

TARTALOM

A fejezetben

$$I \overset{d}{=} Dot \quad ; \quad n \overset{d}{=} t_q - 1$$

III.1.

Algebrai definiciók és tételek

TARTALOM

A definiálórelációkat (S) egyenleteknek is, és relációnak is tekintjük.

$$\mathfrak{A}_{\hat{g}} \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fr}_{\mathrm{Do}\,g}, \mathfrak{A}) \; ; \quad \mathrm{Do}\,g \upharpoonleft \mathfrak{A}_{\hat{g}} \overset{d}{=} g$$

$$\mathfrak{A} \models_g S \overset{d}{\Longleftrightarrow} S \subseteq \mathfrak{A}_{\hat{g}}{}^{\circ}$$

$\mathfrak{Fr}_I^{(S)} K$, $\mathfrak{Cr}_I^{(S)} K$ definiciója

Jelölés: $\dots^{(S)} K \overset{d}{=} \dots_I^{(S)} K$, ahol $I \overset{d}{=} \bigcap \{ J : S \subseteq {}^2\mathfrak{Fr}_J \}$

$$\dots_I K \overset{d}{=} \dots_I^{(0)} K$$

III1.1T: a) $\mathfrak{Fr}_I^{(S)} K = \mathfrak{Fr}_I^{(S)} SPK$

b) $\mathfrak{Cr}_I^{(S)} K = \mathfrak{Cr}_I^{(S)} SPK$

$$\Gamma_I^{(S)} K \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A}_{\hat{g}} : \mathfrak{A} \models_g S , \; g \in {}^I A , \; \mathfrak{A} \in K \}$$

$$p_I^{(S)} K \overset{d}{=} \langle \langle g_x \rangle_{g \in \Gamma_I^{(S)} K} \rangle_{x \in \mathfrak{Fr}_I}$$

III1.2T: $p_I^{(S)} K^{\circ} = \mathfrak{Cr}_I^{(S)} K$

III.2.

Az $\langle \mathfrak{F}_{P_t}, k \rangle$ logika szemantikájának tisztán algebrai előállitása

T A R T A L O M

$$R_t \overset{d}{=} D_t \cup H_t$$

$$D_t \overset{d}{=} \{ \exists_j q v_{i_0} \ldots v_{i_n} = q v_{i_0} \ldots v_{i_n} \;:\; q \in I,\ i \in {}^{\omega}\omega,\ j \in \omega \setminus i^*(n+1) \}$$

$$H_t \overset{d}{=} \{ =_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \ldots v_{i_n} = =_{i_m j} \wedge q v_{i_0} \ldots v_{i_{m-1}} v_j v_{i_{m+1}} \ldots v_{i_n} \;:\; q \in I,\ i \in {}^{\omega}\omega,\ j \in \omega \}$$

$$S_t \overset{d}{=} \{ {}_{t_q}s_{t_q / i}(q v_0 \ldots v_n) = q v_{i_0} \ldots v_{i_n} \;:\; q \in I,\ i \in {}^{\omega}\omega \}$$

$$H^{s}{}_{[\mu_0/\nu_0, \ldots, \mu_n/\nu_n]} \overset{d}{=} s^{m+0}_{\nu_0} \circ \ldots \circ s^{m+n}_{\nu_n} \circ s^{\mu_0}_{m+0} \circ \ldots \circ s^{\mu_n}_{m+n}, \quad \text{ahol } m = \sum_{i \in H} i + \sum_{i=0}^{n} (\nu_i + \mu_i)$$

III2.1L: $(\forall \mathfrak{B} \in CA)(\mathfrak{B} \models_g R_t \Rightarrow \mathfrak{B} \models_g S_t)$

III2.1LK: $\Gamma^{(R_t)} CA \subseteq \Gamma^{(S_t)} CA$

III2.2L: $\mathfrak{W} \ni \mathfrak{B} \models_g R_t \Longrightarrow (\exists! \mathfrak{A} \in M_t)\ \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = {}^{\mathfrak{B}}\!/\hat{g}$

III2.2LK: a.) $(\forall g \in \Gamma^{(R_t)} \mathfrak{W})(\exists! \mathfrak{A} \in M_t)\quad \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$

b.) $(\forall \mathfrak{A} \in M_t)(\exists! g \in \Gamma^{(R_t)} \mathfrak{W})\quad \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = g$

III2.1M: M_t-t és $\Gamma^{(R_t)} \mathfrak{W}$-t azonositjuk a fenti megfeleltetés szerint .

III2.1T: $k = p^{(R_t)} \mathfrak{W}$

III2.1TK: a.) $\equiv \; = \mathfrak{C}^{(R_t)} CA$

b.) $\mathfrak{F}_{P_t} / \equiv \; = \mathfrak{F}^{(R_t)} CA$

III2.2M: R_t szerkezete algebrailag légbőlkapott: a következő fejezetben segitünk ezen.

III.3.

Változójelmentes elsőrendü predikátumkalkulus

TARTALOM

III3.1D: A változójelmentes elsőrendü pred.kalk. $\langle \mathfrak{Fr}_I, k \rangle$, ahol
$k \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{Fr}_I, \underset{\mathfrak{A} \in M_t}{\mathbb{P}} \mathfrak{L}_A)$; $k(q)_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \{ s \in {}^{\omega}A : t_q \mid s \in \mathfrak{A}_q \}$.

III3.1L: $k^* \mathfrak{Fr}_I = k^* \mathfrak{Fr}_{P_t}$

III3.1LK: $\langle \mathfrak{Fr}_{P_t}, k \rangle$ ekvivalens $\langle \mathfrak{Fr}_I, k \rangle$

III3.1M: Az $\mathfrak{Fr}_I$ nyelv kifejezőereje tehát megegyezik az $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ nyelv kifejezőerejével

III3.2D: a) $\mathfrak{A} \models_g t \overset{d}{\Longleftrightarrow} (\forall r \in I)(\forall i \notin t_r)\, c_i g_r = g_r$
b) $\Gamma^{(t)} K \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A}_{\hat{g}} : \mathfrak{A} \models_g t, \mathfrak{A} \in K \}$
c) $\mathfrak{Fr}^{(t)} K$ stb. hasonlóan

III3.2M: A dimenziókorl. a definiálórelációk egy érdekes speciális esete.

III3.1T: $k = p^{(t)} \mathfrak{Lr}$

III3.3M: A logikát mostmár bevezethetjük egy tisztán algebrai konstrukcióként.
$\doteqdot \overset{d}{=} k^{\circ}$

III3.1TK: a) $\doteqdot = \mathfrak{C}r^{(t)} CA$
b) $\mathfrak{Fr}_I / {\doteqdot} = \mathfrak{Fr}^{(t)} CA$

III3.4M: Az it.kalk.taut. form.alg.ja a szabad Boole-alg.; a t-tip. pred.kalk. taut. form.alg.ja a t-vel dim.korl.tt szabad cil.alg.

III3.5M: Az $\mathfrak{Fr}_I$ vizsgálatával $\mathfrak{Fr}_{P_t}$ -ről is, az algebrákról is megtudtunk vmit.

III3.6M: a) A változójelmentes logikából kiindulva a szokásos kényelmes nyelvek előállithatók röviditések bevezetésével.
b) Az elsőr. logika ekvivalens változatai sokoldalu rendszert képeznek.
c) Be lehet épiteni szabályosságokat a nyelvbe (adekvát nyelvek)
d) Történetileg a beépült szabályosságokat kiemelve jutottunk $\mathfrak{Fr}_I$ -hez.
e) A bonyolultsági hierarhiában való közlekedés eszközei.

III3.7M: Más stratégiát is választhattunk volna a tanulmány felépitésénél.

III3.8M: A cil. alg. fogalma nélkül is összefoglalhatók az eredmények.

III3.9M: A felhasznált eszközök szükségességét a köv.fejezetben bizonyitjuk.

III.4.

A definiálórelációk szükségessége

TARTALOM

III4.1T: Van t tipus, melyre

1a.)
$$\begin{array}{ccc} & Gr^{(D_t)} CA & \\ \cup & & \subset \\ Gr_{P_t} CA & & Gr^{(D\cup H_t)} CA \\ \subset & & \cup \\ & Gr^{(H_t)} CA & \end{array}$$

1b.) $Gr_I CA \subset Gr^{(t)} CA$

III4.2T: Ha $t=0$, akkor

1a.)
$$\begin{array}{ccc} & Gr^{(D_t)} CA & \\ = & & = \\ Gr_{P_t} CA & \cap \| \cup & Gr^{(D\cup H_t)} CA \\ = & & = \\ & Gr^{(H_t)} CA & \end{array}$$

1b.) $Gr_I CA = Gr^{(t)} CA$

Ha $t \neq 0$, akkor

2a.)
$$\begin{array}{ccc} & Gr^{(D_t)} CA & \\ \neq & & \neq \\ Gr_{P_t} CA & \not\cap \not\| \not\cup & Gr^{(D\cup H_t)} CA \\ \neq & & \neq \\ & Gr^{(H_t)} CA & \end{array}$$

2b.) $Gr_I CA \neq Gr^{(t)} CA$

III4.1M: Az ℓ tipushoz ragaszkodva nem lehet $\equiv$ -t egyenletekkel megadni:

III4.3T: Nincs (ℓ-tipusu) K algebraosztály, melyre

a.) $\equiv \; = Gr_{P_t} K$, vagy

b.) $\doteq \; = Gr_I K$

III4.2M: $\sim(\exists K)(\, Gr^{(D_t)} CA = Gr_{P_t} K \;\vee\; Gr^{(H_t)} CA = Gr_I K \,)$

III4.3M: $t=0$ csakkor $(\exists K) \equiv \; = Gr_{P_t} K$ csakkor $(\exists K) \doteq \; = Gr_I K$

IV.

Tipusfüggetlen elsőrendü logika

T A R T A L O M

IV.1D: A tipusfüggetlen logika $\langle \mathfrak{F}_I, k \rangle$, ahol

$$M^I \overset{d}{=} \bigcup_{t \in I_\omega} M_t$$

$$k \in Hom(\mathfrak{F}_I, \underset{\mathfrak{A} \in M^I}{\mathbb{P}} \mathcal{L}_A) \quad , \quad k(q)_{\mathfrak{A}} \overset{d}{=} \{ s \in {}^\omega A : (\exists n \in \omega)\, n \upharpoonright s \in \mathfrak{A}_q \}$$

IV.1T: $\langle \mathfrak{F}_I, k^{M_t} \rangle = \langle \mathfrak{F}_I, k \rangle$

IV.1M: A t-tipusu logika visszavezethetősége a tipusfüggetlen logikára.

IV.2D:

$$VR^{(A)} B \overset{d}{=} \begin{cases} 0 & \text{, ha } B = 0 \\ A & \text{, ha } B = {}^\omega A \\ \{ (\bigcup \Delta^{(\mathcal{L}_A)} B) \upharpoonright s : s \in B \} & \text{, egyébként} \end{cases}$$

IV.3D: $N^I \overset{d}{=} \{ \mathfrak{A} \in M^I : (\forall q \in I)\, \mathfrak{A}_q = VR^{(A)} k(q)_{\mathfrak{A}} \}$

IV.1L: $(\forall \mathfrak{A} \in M^I)(\exists ! \mathfrak{B} \in N^I)\; \varepsilon_{\mathfrak{A}} \circ k = \varepsilon_{\mathfrak{B}} \circ k$

IV.2T: $(k^{N^I})^\circ = k^\circ$

IV.3T: $k^{N^I} = p_I\, Lr$

IV.4D: $\approx \overset{d}{=} k^\circ$

IV.3TK: $\approx\; = Cr_I\, Lr = Cr_I\, Lf = Cr_I\, Ha = Cr_I\, Re \neq Cr_I\, CA$

IV.2M: $\langle \mathfrak{F}_I, k \rangle$-hoz nehezebb kezelhető kalkulust találni.

IV.3M: A tipusfüggetlen logika algebrai szerkezetének összehasonlitása a t-tipusu változójelmentes logikáéval.

IV.4M: A tipusfüggetlen logikából kiindulva hogyan lehet eljutni a függvényjeles logikáig (röviditések és elméletek bevezetésével).

62.015

Kiadja a Központi Fizikai Kutató Intézet
Felelős kiadó: Sándory Mihály igazgatóhelyettes
Szakmai lektor: Horváth Sándor
Példányszám: 105 Törzsszám: 73-8500
Készült a KFKI sokszorosító üzemében,
Budapest, 1973. junius hó